Didáctica de la relatividad aditivo-ordinal y de los números enteros

Introducción

Los números positivos y negativos, números con signo o, más formalmente, números enteros son el resultado de una de las ampliaciones del campo numérico, en concreto la que se produce por la simetrización del semigrupo aditivo de los números naturales y, consecuentemente, como tal ampliación, por la conservación de todas las demás propiedades fundamentales, en particular de la multiplicación y el orden en N. Se trata de una ampliación motivada por necesidades matemáticas, realizada formalmente, y que zanjó un desarrollo histórico largo, plagado de dificultades y "sorprendente" (Glaeser, 1981). En palabras de Fischbein (1.987):

> *"el concepto de número negativo, contradice el concepto de número tal y como había sido originalmente desarrollado en la historia del razonamiento matemático",* siendo el mismo*, "intuitívamente contradictorio".* Son *"expresiones matemáticas, al igual que los números imaginarios: son un subproducto de los cálculos matemáticos y de ningún modo la expresión simbólica de propiedades ya existentes".*

Asímismo, Felix Klein (1927) lo expresa de la siguiente manera:

> *"se presenta pues, aquí por primera vez, el paso de la matemática práctica a la formal..."; "La cuestión solo quedó aclarada, cuando ya en el siglo XIX, se observó que no se trataba de una necesidad lógica de los nuevos conceptos, ni por consiguiente, de demostrar la regla de los signos, sino simplemente, de reconocer que tales nuevos conceptos son lógicamente admisibles, aunque sean arbitrarios, y, lo mismo que el principio de permanencia, obedezcan a una simple razón de comodidad".*

Así pues, podemos decir que estamos ante un conocimiento matemático elemental que estuvo informalmente presente durante más de tres milenios en las actividades relacionadas con el cálculo y las manipulaciones algebraicas y que ha sido legalizado recientemente (segunda mitad del siglo XIX) a través de la vía convencional. Dicho así, no hay nada más que tratar en el terreno matemático; los números enteros funcionan porque se han construído así para que lo hagan, constituyen un modelo matemático aplicable a un dominio muy amplio que se extiende a través de la aritmética, el álgebra y la geometría y forman parte del conocimiento legalmente constituído. Sin embargo, la situación no es igualmente clara en el campo de la Educación Matemática, en el que se pretende que los alumnos aprendan en poco tiempo y en edades tempranas, por necesidades curiculares, lo que la humanidad ha tardado tanto tiempo en comprender y construir. Además, nos encontramos ante un conocimiento matemático elemental que es importante y a la vez didácticamente complejo, por cuanto que, por un lado, incide en el paso de la aritmética al álgebra, afecta a grandes áreas de las matemáticas y constituye un ingrediente básico en la educación del pensamiento numérico y algebraico, y, por otro, su tratamiento didáctico no se deduce claramente de la construcción matemática ni se puede posponer íntegramente a niveles escolares más avanzados o ajustarse directamente a las pautas intuitivas y constructivas que se recomiendan en la actualidad para la enseñanza de las matemáticas elementales.

El corto espacio de esta exposición se divide en dos partes. Una primera, llamada "fundamentos", en la que se incluye una revisión sucinta y comentada de los conocimientos más relevantes de que disponemos sobre el tema en el Área de Didáctica de la Matemática y que justifican las consideraciones realizadas anteriormente. En la segunda parte, teniendo en cuenta que la formación inicial específica de los profesores de matemáticas forma parte del campo general de la Educación Matemática y, por tanto, es también competencia del Área de Conocimientos, se expone una propuesta de actuación concreta en dicho ámbito, en lo que podría ser una parte de la asignatura "Didáctica de la Matemática" en un curso de formación inicial de Maestros de Educación Primaria.

Parte I: Fundamentos

Principales problemas didácticos

Algunas cuestiones elementales que pueden surgir por parte del profesor o de los alumnos ante el tratamiento didáctico de los números enteros son las siguientes:

1. ¿Es lo mismo 2 que +2?. ¿En que se diferencian?. ¿Y 2 y 2?. ¿Que es un número negativo?.
2. ¿Porqué "menos por menos es igual a más"?.
3. ¿Porqué se define la multiplicación de pares de números naturales de la forma: (a, b) x (c, d) = (ac + bd, ad + bc)?. ¿Que significado tiene la multiplicación de pares ordenados?.
4. ¿Que tienen que ver los signos que anteceden a los números enteros con los signos de las operaciones de adición y sustracción?. ¿Significan lo mismo?, ¿son diferentes?.
5. ¿Sumar números naturales es la misma operación que sumar números enteros?.
6. ¿Porqué no tiene sentido en algunos casos sumar o multiplicar temperaturas?. ¿Y que sentido tiene que si multiplico dos deudas obtenga como resultado una fortuna?.
7. ¿Porqué es tan difícil encontrar un ejemplo práctico de la multiplicación de números enteros como ley de composición interna?.
8. ¿Hay algún campo, algún modelo con significado concreto, alguna situación cotidiana y real en la que se puedan ver claramente los números enteros con todas sus propiedades?. ¿Porqué no?.
9. ¿Que tienen que ver los números enteros con el Algebra?. ¿Son realmente números o por el contrario, deben ser tratados como relaciones algebraicas elementales?. ¿Porqué se sacan del contexto algebraico en el que surgieron históricamente para ser enseñados como números en pie de igualdad con los naturales y racionales?.
10. ¿Construcción formal?; ¿situaciones concretas de aplicación?; ¿que aspectos habría que considerar?; ¿como secuenciarlos?; ¿en que niveles?; etc.

Las respuestas a estas y otras cuestiones requieren de un estudio complejo que debe atender a varios campos de análisis así como a las relaciones entre ellos. Estas áreas básicas son: la Historia y Epistemología, la Fenomenología, la Cognición y la Enseñanza y el Currículum.

I Historia y Epistemología

1 Elementos para un análisis histórico-crítico

1.1 Desarrollo histórico y situación actual

¿que pasó con los números enteros?; ¿que ha sido durante más de 30 siglos lo que hoy entendemos por números positivos y negativos y por números enteros?. La complejidad del tema se refleja en los siguientes datos[1].

Los primeros antecedentes históricos: la negatividad en la antigua China.

Lizcano, E. (1993) plantea e interpreta "los primeros antecedentes históricos conocidos de los números enteros" (pág. 66). En el capítulo II se aborda el análisis ". . de ciertos textos matemáticos en los que se construyen las primeras maneras de negatividad." (pág. 61) en el contexto del álgebra y la numerología chinas. El centro de dicho análisis se sitúa en el capítulo octavo de "los nueve capítulos del arte matemático" (*Jiu zhang suanshu*) llamado "fang cheng", y en los comentarios de Liu Hui (s. III d.C.) a dicho capítulo. En dicho texto se construye *"... cierta forma de negatividad: la que llamaremos zheng/fu/wu."* (pág. 62) a partir del método de "cálculo en el tablero" y que el autor relaciona con lo que denomina "Algebra instrumental". Después de establecer las reglas zheng/fu (positivo/negativo) (apartado II.5, pág. 83) y contextualizarlas en el caso particular de los problemas originales que se desarrollan en el "capítulo octavo", pasa a justificar su relación con lo que hoy entendemos por números negativos y números enteros, prestando atención al concepto de "cero" (a nuestro entender el aspecto clave de las interpretaciones que se establecen) y a la estructura de grupo (evidentemente supeditada a la existencia de un único cero como elemento neutro).

El autor establece que con anterioridad al año 202 a.de C. (dinastía de los Primeros Han), "la negatividad emerge en términos de oposiciones respecto de un centro o hueco . ." y aparece en diferentes ámbitos de la actividad de aquélla época bajo diferentes formalizaciones. "Estas negatividades formales . ., se manifiestan por: i) ciertos complejos simbólicos . . que operan en términos de oposiciones que pivotan sobre un 'hueco' que actúa como 'quicio' o 'centro' en torno al cual las oposiciones se equilibran; ii) una concepción cualitativa y simbólica del espacio de representación; iii) ciertos procesos de racionalización asociados (al lenguaje ordinario); iv) un modo de pensar que descansa en los criterios prelógicos 'de oposición' y 'de equivalencia'.".

El autor también compara la negatividad en la cultura china y en la cultura occidental, estableciendo que en la Grecia clásica la 'negatividad' no surge de un "criterio básico de oposición", sino del juego de determinación/indeterminación que caracteriza a la Matemática de dicha cultura. Aquí, "la negatividad nunca llega a adquirir la suficiente entidad como para siquiera ser susceptible de verse rechazada". En el 'alejandrinismo' y, en particular, en Diofanto, ". . la negatividad se construye 'a tientas' y se rechaza en cierto sentido lo que se asume en otros.". Se trata de un "imaginario mestizo e inestable" del que surge ". . la que podríamos llamar, propiamente, primera forma

[1] Un desarrollo extenso de la mayor parte de este apartado se puede encontrar en el Capítulo 2 de González y otros (1990).

occidental de ‘negatividad’.”, es decir, la negatividad dentro de una tradición (sustracciones, ‘nada’, . .) vs. la negatividad en términos de opuestos articulados en torno a un quicio que, rigiendo su enfrentamiento, rige también su anulación recíproca.” (pág. 267).

Como veremos a lo largo de la exposición, no estamos plenamente de acuerdo con la interpretación que hace el autor de la negatividad en la cultura china, puesto que los antecedentes que se relatan, al igual que otros más conocidos como el modelo hindú de bienes y deudas, no contextualizan completamente los números enteros como plantea el autor (apartado II.7, pág. 97), sino que son los primeros antecedentes conocidos de los números naturales relativos, que, como también veremos, son los precursores del grupo aditivo y ordenado de los números enteros.

Otros antecedentes previos a la legalización

* Bienes y deudas (Brahmagupta; civilización hindú, 628).
* Restas indicadas (Fibonacci; Edad Media, 1.202).
* “Numeri absurdi” (Stiffel, M., 1.544).
* Artificios de cálculo (Stevin, S.; Renacimiento, 1.548-1.620).
* Un “retroceso” en oposición a lo positivo que es un “avance” (Girard, s. XVII).
* Una coordenada en la recta numérica, formada por dos semirrectas opuestas una de la otra (Newton; Cap. V de “Aritmética Universalis”, 1.676).
* Una “cantidad” menor que nada y precedida del signo menos (D'Alembert; MacLaurin, 1.698-1.746).
* Una raiz positiva de una ecuación pero situada en una falsa posición (De Morgan, 1.806-1.871).
* Una cantidad de una magnitud que es susceptible de aumento o disminución de otra magnitud de la misma especie (Cauchy, A., 1.789-1.857).
* Un ente abstracto sin definir pero con unas propiedades claras y útiles (Euler, Wallis, Laplace).

Desde la legalización hasta hoy

* Un símbolo objeto de un campo ampliado en virtud del principio de permanencia de las leyes formales (Hankel, H., 1867, tomado de Peacok, G., 1.791-1.858). (Inicio de la construcción de Dedekind).
* Una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales (Dedekind, 1.831-1.916). (construcción usual en la enseñanza actual).
* Un elemento particular del cálculo de las congruencias módulo x + 1 en el anillo de los polinomios en una indeterminada con coeficientes naturales (Kronecker, 1.887).
* x es un operador que aplicado a un número mayor o igual que él, da como resultado otro número (Méray, 1.835-1.911; Peano, J., 1.858-1.932).
* Una diferencia cuyo minuendo es cero (Holzmüller, 1.926).
* Una relación asimétrica entre números naturales. (el entero a, será la relación R tal que para x, y e N, x R y ⇔ x + a = y). (Russell, B., 1.919; recogida en: Russell, B., 1.973).
* Un elemento de un conjunto E no vacío que verifica los axiomas: (Padoa, A., 1.868-1.937; en Enriques, F., 1.987).

1. A cada a e E, se le puede hacer corresponder unívocamente otro elemento de E que se denomina el siguiente de a y que designaremos por a'.
2. A cada elemento a e E, se le puede hacer corresponder unívocamente otro elemento å e E, que se denomina el simétrico de a.
3. El simétrico del simétrico de a, es el mismo a.

4. El simétrico de a, es igual al siguiente del simétrico del siguiente de a.
5. Existe un elemento de E que denominaremos cero y que designaremos con la notación 0, el cual es simétrico de sí mismo.
6. Todo elemento distinto de cero, es distinto de su simétrico.
7. Si A es un subconjunto de E no vacío y tiene las propiedades siguientes:
a) si a e A, entonces a' e A; b) si a = b' y a e A, entonces b e A, A es idéntico a E.

* Un elemento de un caso particular, ejemplo o modelo de la estructura de anillo de integridad totalmente ordenado (consideración usual desde el estructuralismo de Bourbaqui).

Los números enteros en la actualidad

La admisión y legalización de los números negativos fué posible en el ámbito de las primeras ampliaciones de los conjuntos numéricos elementales, que entró en el siglo XIX en un terreno formal puramente matemático. Esto se consiguió mediante el principio de permanencia de las leyes formales (Peacok (1791-1858), Hankel (1867); citados y comentados en González y otros, 1990, págs. 48-49), que de forma simplificada y particular dice lo siguiente:

> *"todas las reglas que se verifican para los números naturales deben seguir verificándose para los nuevos campos numéricos, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como casos particulares de las nuevas definiciones en los campos ampliados sin que exista contradicción"*

La ampliación requiere identificar los números naturales con los positivos, añadir a estos los negativos como opuestos para la adición en una estructura de orden total sin primer ni último elementos y definir la multiplicación de manera que el producto de números positivos verifique las mismas propiedades que el producto de números naturales y se cumpla la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Sobre esta idea general se construyen varias teorías a finales del siglo XIX. Una de ellas, la conocida como teoría de los pares ordenados debida a Dedekind (1813-1916), es la que se suele utilizar hoy día (una exposición clara de esta construcción se puede encontrar en Godement (1967) y en Condamine (1971); desarrollos más didácticos son los de Richardson (1976, pp. 107-115), Colectivo Periódica Pura (1982, págs. 149-159), Nortes (1993, págs. 131-146) o González y otros (1990, págs. 105-122)).

De forma resumida, la ampliación de N a Z se realiza a partir del conjunto NxN, entre cuyos elementos se establece una relación de equivalencia R llamada "equisustractividad". El conjunto cociente NxN/R es el conjunto de los números enteros, en el que se define la suma de pares ordenados representantes de cada clase y se demuestra que es compatible con la relación de equivalencia y verifica todas las propiedades de la estructura de grupo conmutativo. A continuación se identifican los enteros positivos con los naturales, se extiende el orden natural a Z, se demuestra que ambos conjuntos son isomorfos para la suma y se define el producto de dos números enteros de tal forma que la multiplicación de enteros positivos se comporte exactamente igual que la multiplicación de naturales. Finalmente se comprueba que la multiplicación así definida es una ley de composición interna, asociativa, conmutativa, con elemento neutro y que verifica la propiedad distributiva con respecto a la suma.

A partir de dicha construcción se pueden definir otras operaciones aritméticas de uso frecuente, tales como: la división, que se define como operación inversa a la multiplicación aunque no es una ley de composición interna, la potenciación de exponente natural, que es posible en todos los casos gracias a la propiedad asociativa de la multiplicación y la radicación de índice natural, operación inversa a la potenciación y cuyo resultado no siempre es un número entero. Del mismo modo, la aparición del doble signo da lugar al concepto asociado de valor absoluto.

El conjunto de los números enteros posee una estructura algebraica de anillo de integridad totalmente ordenado, en el que está incluído, por construcción, el semianillo de los números naturales identificado con el subconjunto Z+. Estos números permitirán la sustracción de números naturales en todos los casos y la resolución de todo tipo de ecuaciones en lo que a la operatividad con los signos se refiere.

1.2 Significados históricos: El número entero como útil y como objeto.

El número entero ha pasado por las tres fases históricas comunes a la mayoría de los objetos matemáticos (Chevallard,1979; Brousseau, 1986):

• etapa protomatemática (utilización "implícita" sin toma de conciencia).

• etapa paramatemática, (objeto familiar, reconocido, nombrado, del que se estudian las características y propiedades, pero que no ha sido organizado y teorizado).

• etapa matemática, (objeto bajo el control de una teoría matemática) .

En la mayor parte del desarrollo histórico, el número entero ha tenido el estatuto de concepto protomatemático o paramatemático, alcanzando la categoría de objeto matemático en un estadio relativamente reciente. Podemos decir que el número entero ha sido durante más de veinte siglos un útil (Douady, 1984), una herramienta que servía para solucionar problemas, mientras que a partir de su construcción y formalización matemática (toma de conciencia matemática) se convierte en un objeto validado e institucionalizado.

<u>El número entero útil</u> (número entero contextualizado o aún no formalizado, instrumento para representar, describir y resolver situaciones relativas y operar en ellas o para solucionar problemas puramente matemáticos (útil matemático no formalizado)).

Con este estatuto de útil podemos distinguir tres interpretaciones o papeles diferentes:

• útil primario o relaciónútil, (operador, transformación o relación entre cardinales u ordinales naturales explícitos) .

• útil secundario o relaciónobjeto, (estado u objeto contextualizado con entidad propia; operador y/o estado contextualizado).

• útil matemático no formalizado, (expresiones matemáticas sin significado concreto).

<u>El número entero objeto</u> (objeto matemático; objeto del saber científico institucionalizado). El entero útil, en su acepción de objeto contextualizado o de útil matemático, se conoce, se acepta, se comprende su utilidad y funcionamiento y se le dota de un estatus superior mediante su incardinación en las teorías matemáticas conocidas.

1.3 Principales obstáculos epistemológicos

(Glaeser, G. (1981))

1. Incapacidad para manipular cantidades negativas aisladas
2. Dificultad para dotar de significado a las cantidades negativas aisladas
3. Dificultad para unificar la recta numérica (que se manifiesta por ejemplo en la consideración de la recta numérica como yuxtaposición de dos semirrectas opuestas)
4. Ambigüedad de los dos ceros (cero origen o relativo y cero absoluto)
5. Deseo de un modelo unificado
6. Dificultad para superar el sentido concreto atribuído a los números

1.4 Algunas consecuencias de la historia de los números negativos.

a) El principal inconveniente para la comprensión, aceptación y legitimación de los números negativos, ha sido históricamente (y lo es, aún hoy día, didácticamente), la creencia de que <u>*el número representa una cantidad en sentido "absoluto".*</u>

b) Las cantidades negativas hicieron su aparición a partir de las ecuaciones y las manipulaciones algebraicas relacionadas con situaciones concretas, pero no es hasta el momento en que la Matemática se concibe al margen de la realidad física, cuando se interpretan *las ecuaciones como expresiones formales, y sus soluciones y reglas de resolución independientes de leyes o hechos concretos*.

c) El principal problema de las interpretaciones concretas es la *justificación de la multiplicación como operación interna y la coherencia del modelo completo*, aspectos necesarios desde el punto de vista formal. En este sentido, aún hoy día se sigue buscando una justificación lógica para la regla de los signos en el campo de la Educación Matemática.

d) Las construcciones formales son *convenciones arbitrarias para preservar las reglas de cálculo* y situar los números negativos en el lugar adecuado dentro del edificio matemático.

e) Las soluciones formales vienen a resumir y modelizar las concepciones parciales anteriores, aunque no era este su objetivo. A pesar de ello *existen algunas incoherencias que aparecen cuando se pretende compatibilizar la estructura formal completa con los significados concretos*.

f) A partir de su construcción formal el tema dejó de tener interés para la comunidad de matemáticos profesionales. Sin embargo *sigue siendo un tema abierto en el campo de la Educación Matemática*.

2 Elementos para un análisis psicogenético[2]

Las raices del número entero, se hunden en el proceso de formación de las primeras nociones numéricas. Así lo manifiesta Piaget, J. (1975):

> *"el carácter reversible de las operaciones de adición y sustracción, parece implicar sin más, la necesidad de completar la sucesión directa de los enteros positivos, con la sucesión inversa de los enteros negativos". "Parece tan general y natural, que su significación empieza en las reuniones y separaciones de las clases cualitativas".*

Igualmente, Jean-Blaise Grizé (1979) afirma:

> *"Resulta entonces dudoso, que Piaget conciba su conjunto como actualmente infinito, antes de un estudio propiamente matemático. Esto es tanto más interesante por cuanto al ser finito el semigrupo al cual se ve conducido, este semigrupo constituye ya un grupo. De lo cual se desprende que la idea si no el concepto algebraico de número negativo, aparece, de este modo, como contemporáneo de la de número natural. Y, hablando con propiedad, la extensión al conjunto de los enteros, por el procedimiento habitual de los pares, que sumerge al semigrupo en un grupo, aparece al mismo tiempo como una prolongación natural de las operaciones fundamentales que constituyen el número como una síntesis de las agrupaciones de clases y de relaciones asimétricas".*

Todo ello plantea la cuestión de las relaciones entre lo absoluto y lo relativo en la construcción de las nociones numéricas, es decir, las primeras nociones numéricas que construye el individuo, ¿son "absolutas" o "relativas"?, ¿se refieren al número natural en contextos concretos?, o, por el contrario, ¿se acercan más a lo que se puede denominar "número relativo" o a lo que hemos llamado "entero útil"?. Podría ocurrir que las primeras nociones numéricas que construye el individuo sean nociones relativas, aunque interviniendo, evidentemente, aspectos contextuales que se encuentran en la base de lo que entendemos por "número natural". Esta suposición viene avalada por el hecho de que la noción de número natural, aunque lógica y algebraicamente anterior a la de número entero, es lo suficientemente compleja como para suponer que se construye en su totalidad en

[2] Capítulo 3 de González y otros (1990).

edades tan tempranas y previamente a las nociones relativas.

Por otra parte, las consideraciones de Piaget que se exponen en el texto de referencia, conducen a la conclusión de que una vez que el pensamiento se hace reversible, se han de dar los dos tipos de ideas numéricas (positivos y negativos), como conceptos recíprocos que son, de forma indisociable en una única estructura de orden total sin primer ni último elementos. Pero aquí hemos de indicar que los números a que se refiere el autor parece lógico que no sean los números enteros con mayúsculas, sino otras nociones numéricas relativas previas que constituyen los inicios intuitivos de lo que posteriormente se formalizará en un sistema matemático formal con su propio lenguaje, estructura y propiedades. Estas nociones, como veremos, se encuentran en la base de la formación del concepto de número entero en los ámbitos aditivo y ordinal, el cual, si nos atenemos a lo expuesto en apartados anteriores, pasa primero por la categoría de operador, relación o transformación, en su sentido de útil, para adquirir posteriormente la categoría de estado o de resultado, en el sentido de objeto.

3 Elementos para un Análisis lógico-formal y fenomenológico

Hablar de números en el campo educativo es hablar también de sus aplicaciones, es decir, de las situaciones familiares que se utilizan en la resolución de problemas, del lenguaje y sus significados en torno a ellos, de las connotaciones socioculturales, de las cantidades y las medidas en definitiva. Y hablar de cantidades y medidas en el campo de las nociones numéricas elementales es hablar también del origen y la naturaleza de los números como objetos conceptuales y como objetos formales, de las relaciones entre la experiencia y el mundo real, la formación de conceptos numéricos y sus estructuras lógico-formales; dilucidar, en definitiva, una parte de las raíces del conocimiento como una de las tareas fundamentales en Didáctica de la Matemática.

3.1 El número entero como síntesis entre la cantidad y la cualidad.

Etayo, J. J. (1970), aborda el tratamiento del concepto de cualidad en la Matemática y la importancia de las relaciones y del álgebra de relaciones como elementos básicos para el trabajo matemático. En particular, nos interesan sus notas sobre las relaciones entre la cualidad, la cantidad y los números con signo, de entre las que destacamos las siguientes:

> *"Parecía concebida la Matemática como ciencia de la cantidad (. .) Esta concepción va a perdurar durante siglos (. .) Parece entonces que la cualidad, como categoría opuesta a la cantidad en la definición lógica, no iba a tener tratamiento desde el punto de vista matemático. Sin embargo, es un fenómeno general, dentro de la evolución del conocimiento humano, el que se ha llegado a conocer como "cuantificación de la cualidad". La cualidad se puede cuantificar y expresar en números; al mismo tiempo, la Matemática crea nuevos números y nuevos entes que pueden interpretarse como expresión de cualidades." (páginas 38-41).*

La cuestión fundamental, que según el autor es el origen del trabajo que presenta, es la siguiente: "¿Cuándo, en la evolución del concepto de número, se llega a construir un tipo de número que exprese no sólo una cantidad, como los naturales o los fraccionarios, sino además una cualidad?". La introducción por Cardano de la "unidad negativa" como solución de la ecuación $x + 1 = 0$ fué "la primera tentativa para introducir los números negativos".

Coincidimos con el autor, en que la introducción de estos nuevos números fué una pequeña revolución en Matemáticas: *"La idea fundamental que la construcción de los números negativos llega a destruir era la de que el número representa sólo una cantidad."*. Al mismo tiempo, dicha construcción significa: *". . que los números, que hasta entonces expresaban sólo cantidades, pod-*

ían en adelante expresar, al contar con los positivos y negativos, cantidades, sí, pero de dos cualidades opuestas.". En relación con esta afirmación entendemos que los números a los que se refiere no son los números enteros propiamente dichos, como veremos más adelante.

3.2 Epistemología de la Aritmética.

Una de las cuestiones que ocupan un lugar destacado es la relativa a la naturaleza del número y a las relaciones entre el concepto de número y el de cantidad, que afectan también a la naturaleza de los números enteros y del doble signo en matemáticas.

En este punto queremos destacar la *diferenciación entre la naturaleza de la cantidad y del número* que establecen Husserl (1992) y García-Baró (1993) así como las consideraciones del primero de ellos sobre las relaciones entre "más" y "menos", entre "*las comparaciones de cantidades y de números según el más y el menos"* o *".. de los conjuntos que provienen los unos de los otros por aumento o por disminución"*. Si los conjuntos son 'homogéneos' se comparan las cantidades y si son 'heterogéneos', se comparan sus cardinales. Como se ve, la **comparación** se encuentra en la base de lo que entendemos por 'concepto de cantidad' y 'concepto de número'.

3.3 Epistemología de las Ciencias: El proceso de cuantificación desde el punto de vista de la teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas[3]

Nos interesa la comparación cuantitativa y su relación con la medida y el número, por lo que debemos acudir, entre otras fuentes, a la Epistemología de las Ciencias Experimentales. Tomemos para ello la teoría de referencia, de la que nos interesan las siguientes consideraciones:

Lo cualitativo y lo cuantitativo no expresan una separación o diferencia ontológica en la realidad, sino una diferencia en el lenguaje. No existen dos tipos de fenómenos: cualitativos y cuantitativos, sino que estas expresiones se refieren al modo lingüístico que se utiliza para hacer referencia a los fenómenos reales. Es más, existen en general tres tipos de lenguajes: *clasificatorio* o cualitativo, *métrico* o cuantitativo y *comparativo,* topológico o de transición y tres grandes sistemas conceptuales científicos: cualitativos, comparativos y cuantitativos.

Los conceptos cualitativos o clasificatorios son insuficientes o poco precisos. En ellos se puede afinar la clasificación y establecer un orden, lo que significa precisar más la información, es decir, establecer un concepto comparativo.

> *"El paso a las formas conceptuales superiores discurre paralelamente a un aumento del contenido informativo. Los conceptos comparativos o topológicos son conceptos relacionales que permiten hacer comparaciones en el sentido de "más o menos" y se encuentran relacionados desde el punto de vista lingüístico con los comparativos gramaticales".*

Los conceptos <u>*comparativos*</u>, términos intermedios entre los conceptos cualitativos y los cuantitativos, permiten emprender diferenciaciones conceptuales mediante el establecimiento de un orden jerárquico que conduce a una "cuasi-serie". Este orden, que facilita el paso a conceptos cuantitativos mediante una simple metrización, se consigue mediante dos relaciones (precedencia (P) y coincidencia (C)) que cumplen las condiciones siguientes:

a) C es relación de equivalencia; b) C y P deben excluirse mutuamente; c) P es transitiva; d) Para x e y cualesquiera del dominio, debe darse una y sólo una de las afirmaciones: xCy, xPy, yPx; con lo que se dice que P representa una serie respecto a C, o que el par ordenado Q = (C, P) constituye una cuasiserie o un *concepto comparativo* para el dominio. Esta relación de cuasi-orden se

[3] Stegmüller, W. (1979); Mosterín, J. (1984).

puede convertir en una única relación de orden parecida a la relación "≤".

Los conceptos cuantitativos o *métricos*, llamados también conceptos de magnitud, se introducen mediante funciones numéricas de punto o de conjunto que dan lugar a dos tipos de magnitudes: las que proceden de una metrización primaria o fundamental (metrizaciones de cuasi-series) y de una metrización derivada o secundaria (Ej. densidad = masa/volúmen; temperatura (más compleja y depende de la longitud)). Las primeras conducen a magnitudes extensivas (peso, longitud, volúmen, etc.), que se establecen mediante un isomorfismo entre el dominio de la cuasi-serie y el dominio de los números, se reducen al proceso de contar y dan lugar a escalas de proporciones. Las segundas, como la temperatura u otras magnitudes intensivas, dan lugar a escalas de intervalos que se obtienen tomando referencias y diferencias de longitudes.

3.4 Una interpretación concreta de la construcción formal usual. La comparación y las situaciones relativas[4]

Según la construcción formal del grupo aditivo y ordenado de los números enteros, dos pares de números naturales (a,b) y (a', b') están relacionados cuando a - b = a' - b'. Teniendo en cuenta los enfoques dados a las situaciones concretas de sustracción de naturales por Kamii, C. (1.985), Vergnaud, G. y Durand, C. (1.976), y por Carpenter, T. y Moser, M. (1982), dichas diferencias se pueden interpretar como relativas a situaciones de *separación, igualación* ó *complementación* en el contexto de las relaciones "parte-todo", o relativas a situaciones de *comparación* en el contexto de las relaciones entre dos "todos". En este último caso no existe un solo sentido de las acciones, sino que aparece una doble interpretación o un doble sentido característico de toda comparación.

Así, cuando se comparan entre sí dos cantidades a y b distintas aparecen dos respuestas recíprocas implícitas en la acción de comparar; ambas son diferentes y una se deduce lógicamente de la otra y viceversa. En este sentido podemos formar dos pares ordenados (a, b) y (b, a) que representan los dos aspectos de la comparación, es decir, (a, b) representa la situación de a con respecto a b, tomando b como referencia, y (b, a) la situación contraria. En ambos casos existen dos elementos relacionados que caracterizan lo que denominamos "situación relativa": Cantidad natural que establece la diferencia y referencias y sentidos de comparación.

Cada clase de equivalencia de la partición de la construcción formal representa, por tanto, una cantidad o una posición en una serie ordenada y un sentido de comparación. La única diferencia entre una clase y su opuesta es el sentido o la referencia de comparación; esta diferencia es consecuencia de los dos posibles casos de complementación-igualación, causa de la dualidad inherente a la diferencia de sentido, a la suma y la resta o a la diferencia de signo y aparece en las ecuaciones:

a = b + c (c es lo que hay que "añadir" a b para obtener a); (a, b) pertenece a la clase "màs c", "sumar c" ò "c+", definida por la ecuaciòn x = y + c;

b = a - c (c es lo que hay que "quitar" a a para obtener b); (b, a) pertenece a la clase "menos c", "restar c" ò "c ⁻", definida por la ecuaciòn x = y - c.

Pero, ademàs, adoptar èsta interpretaciòn que conlleva la comparaciòn como elemento central, no es en absoluto una cuestiòn gratuìta, ya que, aunque la definición formal no involucra directamente el orden natural soslayando los inconvenientes de su consideración, se demuestra que es precisamente dicho orden natural el responsable de la distinción entre clases recíprocas (González y otros, 1990, págs. 67-68). De èste modo, los pares (a, b) y (b, a) representan los dos sentidos de la comparación, mientras que las expresiones: a = b - c y b = a + c son igualdades recìprocas, equivalentes pero no idènticas (es posible pasar de una otra y viceversa mediante transformaciones dis-

4 Capítulo 3 de González y otros (1990).

tintas), que reflejan la dualidad propia de una situaciòn de comparaciòn aditiva entre a y b.

De todo ello, podemos concluir que es posible interpretar la construcciòn formal usual, en sus aspectos aditivos y ordinales, desde el punto de vista de la comparaciòn entre nùmeros naturales en sus significados concretos. Este punto de vista va a proporcionar nuevos objetos conceptuales distintos de los naturales y los enteros, cuya característica principal es la de reflejar y servir de modelo al campo de la **relatividad aditivo-ordinal** de cantidades ò de posiciones en una serie ordenada. Nuevos objetos que hemos llamado “números naturales relativos” (González, 1995) para distinguirlos de los números naturales y los enteros en sus distintas acepciones (“nùmeros relativos” ò “nùmeros dirigidos” según la terminología francesa y anglosajona).

3.5 Diferencia de signo y relaciones asimétricas: el número entero como relación.

Las consideraciones anteriores son en general coherentes con los planteamientos de Russell, B. (1973) sobre la diferencia de signo.Según este autor, la existencia de dos sentidos contrapuestos implica la existencia de un orden, el cual puede engendrarse de varias maneras, si bien todas son reducibles a la siguiente que se puede considerar como fundamental:

Sea R una relaciòn transitiva asimètrica y sea A una colecciòn de tèrminos, de los que dados x e y cualesquiera se cumple una y sólo una de las relaciones: xRy ò yRx. Cuando èsto se satisface, nuestros tèrminos forman una serie ùnica. Al mismo tiempo, existe $R^{\#}$, relaciòn recìproca de R, que es tambièn asimètrica y transitiva, de tal manera que xRy implica lògicamente $yR^{\#}x$ y viceversa.

Asì pues, el orden depende de las relaciones asimètricas, las cuales tienen siempre dos sentidos, y la diferencia de sentido està estrechamente ligada a la diferencia matemàtica de signo, pudièndose interpretar como la diferencia entre una relaciòn asimètrica y su recìproca. Es decir, dada una relaciòn asimètrica R entre a y b, se puede decir que existe $R^{\#}$ / $aRb \rightarrow bR^{\#}a \wedge bR^{\#}a \rightarrow aRb$.

> *“La relaciòn entre R y R#, es la diferencia de sentido. Es biunìvoca, simétrica e intransitiva. Su existencia es la fuente de las series, de la distinciòn de signos y, por ello, de la mayor parte de la Matemàtica.” B. Russell (1973).*

¿Son aRb y $bR^{\#}a$ proposiciones realmente distintas ò sólo difieren lingüìsticamente?. ¿No existe diferencia aparente entre “a es mayor que b” y “b es menor que a”?. Segùn Russell, opiniòn que compartimos, R y $R^{\#}$ son distintas y las implicaciones anteriores son autènticas inferencias. Asímismo, considerando los nùmeros finitos, los positivos y negativos son las sucesivas potencias de la relación “inmediato posterior” y su recíproca, de tal forma que:

> *“ R^{a} y $R^{a\,\#}$ son los verdaderos enteros positivos y negativos, y aunque asociados con el valor a, son totalmente distintos a èl”; “los términos + a y - a expresan relaciones mutuamente recìprocas”.*

3.6 La estructura aditiva de Z y el sistema comparativo en N

Las conexiones de èstas ùltimas reflexiones con la construcciòn formal por pares ordenados son claras e inmediatas, sin màs que tener en cuenta que cada clase de equivalencia de pares es el grafo de una relaciòn asimètrica. La clase 0, por el contrario, no es engendrada por ninguna relaciòn asimètrica, sino simètrica (la relaciòn de “coincidencia” que en este caso se presenta bajo la forma de “igualdad”), a pesar de lo cual puede ser incluída junto a las demás en un sistema de conjunto. No hay más que recordar que ambos tipos de relaciones (coincidencia y precedencia; simétrica y asimétrica) son los elementos bàsicos para establecer, conjuntamente, un “sistema comparativo” en un dominio determinado (Stegmüller, W., 1979).

El dominio al que nos referimos es el de la numerosidad (cardinalidad u ordinalidad), como una cualidad ò caracterìstica especial de las colecciones y de los objetos, y el sistema comparativo se introduce de acuerdo con las consideraciones establecidas en el apartado 2.3 y teniendo en cuenta las diferentes naturalezas de los objetos en matemáticas y en ciencias experimentales. Es decir, el concepto comparativo se establece en un dominio de numerosidades y sólo proporciona un conjunto ordenado de nuevos objetos que no son los números enteros. Es necesario establecer además, si es posible, la composición aditiva entre ellos así como sus propiedades, proceder a su metrización, dotarlos de entidad numérica y analizar sus relaciones con el grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Como veremos, el resultado de todo el proceso es un nuevo conjunto de entes, calificables de numéricos, que se sitúa entre el semigrupo aditivo y ordenado de los números naturales y el grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Su existencia va a permitir, entre otras cosas, organizar y estructurar una parte del campo de transición de los números naturales a los números enteros, al que hemos denominado el "campo conceptual de los números naturales relativos".

4 El campo conceptual de los números naturales relativos

La formación de los conceptos comparativos, como paso previo a la introducción de una métrica, concede una importancia especial a la estructura ordinal como elemento básico y prioritario en el proceso de constitución de los conceptos métricos. Conjugando estas consideraciones en el marco de los tres elementos que intervienen en el dominio de aplicación de las estructuras aditivo-ordinales de los números naturales y los enteros (las cantidades, los números y las medidas), con las consideraciones epistemológicas sobre los números naturales y enteros, y atendiendo a la comparación como actividad básica en este tipo de procesos, se constata la existencia de relaciones que pueden ser integradas en un modelo formal conjunto y que permiten explicar satisfactoriamente algunos de los mecanismos de la aritmética elemental desde el punto de vista aditivo y discreto[5].

En dicho dominio, además de las cantidades y medidas naturales y enteras, encontramos un tercer tipo de cantidades y medidas a las que llamamos *naturales relativas*, las cuales se diferencian de las enteras y naturales en aspectos básicos de las estructuras ordinales y algebraicas correspondientes[6]. Asímismo encontramos tres tipos de acciones simples diferentes sobre las cantidades y medidas mencionadas: comparaciones, transformaciones y combinaciones, de tal manera que las cantidades y medidas naturales relativas, conocidas en el ámbito de la Educación Matemática como "números/cantidades dirigidas, adjetivadas o relativas" y usualmente consideradas bajo el dominio de aplicación de los números enteros, se originan en la comparación de cantidades y medidas naturales.

Por otra parte, los conjuntos numéricos que regulan matemáticamente el campo de problemas y situaciones del dominio considerado son los números naturales y los números enteros, si bien, es un hecho comprobable que ninguno de los dos es adecuado para modelizar numéricamente el campo de las medidas naturales relativas, cuya estructura y funcionamiento no se ajusta satisfactoriamente a ninguno de ellos[7]. Se constata, por tanto, la ausencia de un modelo numérico que regule de forma satisfactoria el funcionamiento de dichas medidas. Asímismo, del análisis de las características de las medidas naturales relativas, de las diferencias y relaciones existentes entre los tres tipos de

[5] Capítulo 7 de González (1998)

[6] Las medidas naturales relativas vienen representadas por un número natural referido a una medida concreta y acompañado de una adjetivación dual o de uno de entre dos sentidos opuestos (ganar 3 pesetas, 5 pisos más, 3 minutos después, 4 pasos a la derecha, etc.)

[7] Presentan una estructura de semigrupo aditivo no conmutativo, sin elemento neutro y con un orden parcial.

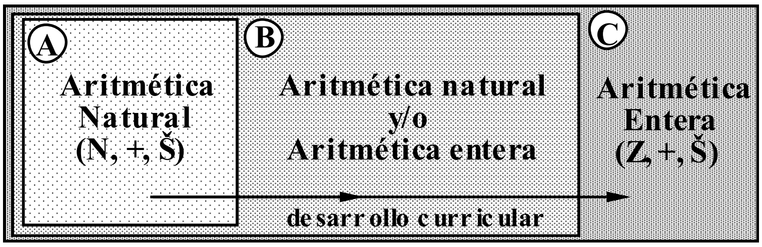
medidas y de las relaciones entre las medidas y los conjuntos numéricos se constata también la importancia y la necesidad didáctica de disponer de un modelo de tal tipo. En consecuencia se construye una estructura numérica isomórfa a la de las medidas naturales relativas y constituída por unos nuevos entes numéricos (**“números naturales relativos”**) que regulan dicho funcionamiento. La necesidad mencionada no es estrictamente formal sino didáctica; atiende a la estructuración de un proceso de enseñanza orientado a favorecer la comprensión de las nociones matemáticas en juego.

Estas nociones numéricas organizan un campo conceptual incluído en el campo aditivo y que se encuentra entre el dominio de aplicación de los números naturales y el de los números enteros. Se trata del **campo conceptual de los números naturales relativos**, constituído por:

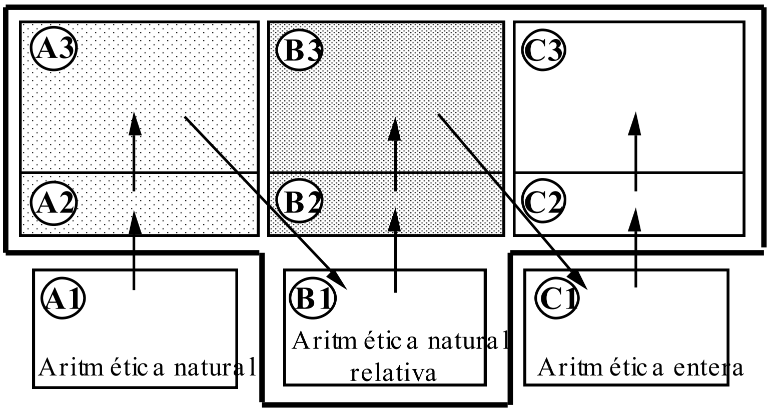
- el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos.
- el conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del sistema simbólico de los números naturales relativos.
- el campo de actuación formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

Este campo permite establecer una **nueva distribución del campo aditivo** (figura adjunta) que elimina satisfactoriamente los problemas que se derivan de la distribución descrita en el cuadro superior y sugiere un proceso didáctico secuenciado que organiza de forma más clara el desarrollo curricular y el trabajo en el aula. De una manera gráfica y simple se puede decir que el cuadro superior ha estado situado “encima” del cuadro inferior, de manera que los números naturales relativos han permanecido literalmente “tapados” por los números enteros.

Dominios de aplicación elemental del campo numérico aditivo según el proceso didáctico usual



Dominios de aplicación elemental del campo numérico aditivo como conclusión del estudio teórico



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relat
(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

Las diferentes partes que integran la nueva distribución, son las siguientes:

A1.- Combinaciones naturales simples.

A2.- Comparaciones y transformaciones naturales simples.

A3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales simples.

B1.- Combinaciones naturales relativas simples.

B2.- Comparaciones y transformaciones naturales relativas simples.

B3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales relativas simples y composiciones de al menos una relación natural relativa simple con al menos un elemento de A2 o de A3.

C1.- Combinaciones enteras simples.

C2.- Comparaciones y transformaciones enteras simples.

C3.- Composiciones de dos o más relaciones enteras simples; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de A2 o de A3; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de B2 o de B3.

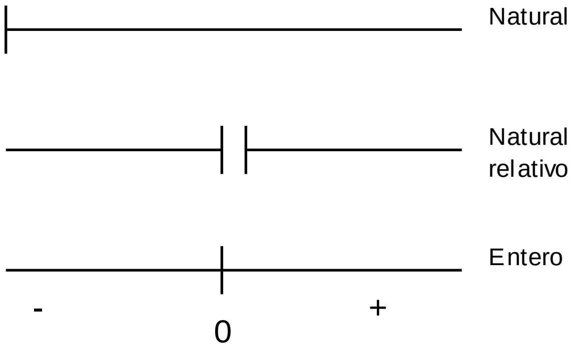
A modo de resúmen:

1).- En el dominio estudiado se distinguen tres tipos de cantidades, medidas y números (naturales, enteros y naturales relativos), cuyos modelos geométricos se ilustran en la figura, tres leyes de composición interna aditiva (adición de números naturales, adición de números enteros y adición de números naturales relativos (combinación entre adición natural y anulación-compensación)) y tres tipos de relaciones básicas definidas a su vez por tres tipos de correspondencias diferentes y con distinto grado de implicación de las estructuras ordinales y algebraicas:

comparaciones: aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia; intervención exclusiva de la estructura ordinal;

transformaciones: leyes de composición externa; estructura ordinal y algebraica;

combinaciones: leyes de composición interna; intervención exclusiva de la estructura algebraica.



2).- El conjunto de los números naturales relativos, con la adición y el orden, presenta las siguientes características estructurales:

Estructura ordinal: orden parcial constituido por dos subconjuntos totalmente ordenados con primer elemento (orden natural).

Estructura algebraica: semigrupo aditivo, no conmutativo y sin elemento neutro.

regulando satisfactoriamente el funcionamiento matemático de las medidas naturales relativas.

3).- Las diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros son las que figuran en el cuadro.

Estructura entera (números enteros ordinarios con la estructura de grupo abeliano y ordenado para la suma)	**Estructura natural relativa (números naturales relativos)**
a).- Orden total.	a).- Orden parcial (natural doble con inversión en la "región negativa").
b).- Sin primer elemento.	b).- Con primer elemento.
c).- "Continuidad" de medidas al cruzar el cero.	c).- "Discontinuidad" de medidas. (no tiene sentido cruzar el cero).
d).- Cero único (elemento neutro para la suma).	d).- Cero doble (dos elementos nulos para la adición).
e).- Composición aditiva: adición entera	e).- Composición aditiva: adición natur y anulación-compensación.

4).- El modelo atiende a las relaciones simples que sirven de base a todos los problemas y situaciones del dominio, proporcionando una estructura y una terminología adecuadas.

5).- Los números naturales relativos se han utilizado, sin formalizar y como útiles matemáticos, hasta finales del siglo XIX. Al aparecer la formalización de los números enteros desaparecen del trasfondo práctico en el que aportaban significados concretos a los problemas. Con el trabajo realizado hemos iniciado la formalización del uso histórico previo a la construcción de Z, para poner de manifiesto que los conceptos que funcionaban antes de dicha construcción, también tienen entidad de “números”.

II Fenomenología

1 Algunos antecedentes

El dominio usual de aplicación de los números con signo incluye situaciones, modelos y problemas que dan significado a los conceptos, estructuras e ideas matemáticas involucradas y que ponen en "funcionamiento" y, a la vez, organizan el conocimiento correspondiente.

Los pocos trabajos que atienden expresamente al dominio de aplicación de los números enteros no son exhaustivos, mezclan fenómenos de diferente naturaleza sin llegar a culminar una clasificación organizada y manifiestan las tendencias de los autores bien en el sentido de utilizar ejemplos concretos para facilitar la comprensión de los conceptos, bien en el sentido de considerar la perspectiva formal como solución elegante para enseñar estos conocimientos numéricos.

El análisis fenomenológico más completo sobre los números enteros es, en nuestra opinión, el que realiza Freudhental, H. (1983, cap. 15, págs. 432-460), para el que el origen y la necesidad de los números negativos aparece en el álgebra de ecuaciones y se consolida más tarde con la algebrización de la geometría.

Al margen de dicha "fenomenología histórica", el autor cita también una serie de modelos antiguos y nuevos para los números con signo: coordenadas en astronomía; medidas relativas a partir de un punto central; haberes y deudas; temperaturas; ganancias-pérdidas; subidas-bajadas en escaleras; contadores positivos y negativos, etc., exponiendo las dificultades que comporta su utilización didáctica y dedicándole una atención particular al modelo geométrico de vectores unidimensionales y a las magnitudes dirigidas en el ámbito del espacio vectorial bidimensional ordinario. Después de argumentar a favor de estos últimos modelos geométricos vuelve a insistir en la permanencia geométrico-algebraica afirmando que *"la justificación de las operaciones numéricas y sus leyes, se encuentra en la simplicidad de la descripción algebraica de las figuras y relaciones geométricas. O dicho de otro modo, el álgebra es válida porque funciona en geometría"* (pág. 450).

En una línea diferente, aunque con reiteradas manifestaciones a favor de la búsqueda de significados concretos para los números y las operaciones aritméticas y claramente en contra de la enseñanza de "reglas vacías" así como del aprendizaje memorístico, Bell, A. (1982) completa los modelos y situaciones concretas usuales con un análisis más amplio en el que se incluyen los contextos matemáticos y científicos en los que son necesarios los números enteros.

Para el autor la cuestión fundamental es la transferencia de conocimientos de unos contextos a otros, jugando un papel especial el plano de coordenadas y los vectores. Desde este punto de vista expone una revisión de los contextos de aplicación de los números enteros, en la que incluye los siguientes temas: exploración de propiedades de figuras planas, transformaciones en el plano, gradientes de líneas, funciones trigonométricas, potencias y exponentes, estadística, mecánica, termodinámica, cálculo, óptica y álgebra.

En un trabajo mucho más modesto que los anteriores y sin ninguna intención aparente de análisis, Schultz, J. E. (1973) expone una relación amplia de ejemplos: tiempo (antes - después, fechas históricas), temperaturas, ascensores, dinero, saldos bancarios, actitudes positivas y negativas, alturas por encima y por debajo del nivel del mar, juegos (ganancias - pérdidas), bolsa, etc.

Estamos de acuerdo con Freudhental de que son muy pocos los fenómenos y las situaciones de la vida real en los que se aplican directa y correctamente los números enteros, lo cual está en desacuerdo con la opinión ya comentada, en sentido contrario, por otros autores y, en particular, con la orientación que adoptan Bell, A. y colaboradores, que utilizan un amplio abanico de situaciones y modelos concretos de los que algunos de ellos no verifican las condiciones estructurales requeridas para ser ejemplos de aplicación de los números enteros.

2 Nuestra posición

Los números positivos y negativos o números con signo dan significado, son útiles u organizan un amplio conjunto de fenómenos que podemos estructurar en tres grandes apartados:

1) fenómenos relacionados con **magnitudes y cantidades relativas o "dirigidas"** (campo de la relatividad aditivo-ordinal).

Se representan mediante números con signo y verifican tan sólo una parte de las propiedades y estructuras de los números enteros; se pueden clasificar en los tres tipos siguientes:

- **1a)** basados en la noción de **opuestos aditivos** (comparaciones y transformaciones aditivas, situaciones duales y medidas naturales relativas (ganancias-pérdidas, ingresos-reintegros, etc);
- **1b)** basados en la estructura de **orden total sin primer ni último elementos** (orden de los números enteros) (temperaturas, números índices, cronología, otras escalas, etc.);
- **1c)** basados en la estructura de **grupo aditivo y ordenado** de los números enteros (adición y orden) (saldos bancarios, puntuaciones en el juego del golf, etc.);

2) fenómenos matemáticos, de entre los que podemos destacar una parte de la aritmética, las manipulaciones algebraicas (ecuaciones, polinomios), cálculo (áreas negativas, integración), geometría (coordenadas), funciones trigonométricas, estadística (desviaciones, correlación), etc.;

3) fenómenos de aplicación de las matemáticas a otros campos, tales como: mecánica, cinemática (distancias, velocidad y tiempo, presiones), electricidad, magnetismo, óptica o economía.

Los números que caracterizan al tipo 1a son los números naturales relativos; los números que caracterizan a los tipos de situaciones 1b, 1c, 2 y 3 son los números enteros.

Por otra parte, los distintos tipos de fenómenos se manifiestan a través de situaciones diversas que se agrupan en torno a modelos, que son representaciones estructuradas de nociones matemáticas. Estos modelos tienen una doble utilidad en Educación Matemática: *"por una parte facilitan la interpretación de hechos y relaciones, conectando las representaciones externas con las internas; por otra, ayudan a resolver problemas de acuerdo con los hechos originales."* (Castro, E., 1994, p. 13).

3 El campo de la relatividad aditivo-ordinal: Origen intuitivo y aplicación parcial de los números enteros

Es el campo de los fenómenos y situaciones de la ampliación "natural" a un contexto relativo de la idea "el número representa una cantidad". Las cantidades son de dos cualidades opuestas y/o se concentran a ambos lados de una referencia central. Este campo tiene su origen en una parte importante del campo conceptual de los números naturales, en concreto, en la que intervienen comparaciones y transformaciones cuantitativas aditivas y ordinales, y alcanza a las situaciones que tienen como modelo el grupo aditivo y ordenado de los números entero, culminación de la "extensión natural" y campo en el que se agota esta vía.

Las nociones métricas y numéricas que intervienen son de dos tipos:

- *naturales relativas*, también llamadas adjetivadas, dirigidas o relativas, que involucran números naturales asociados a una adjetivación dual y se caracterizan mediante tres elementos: número natural (cardinal u ordinal), origen o referencia y doble sentido que da lugar al doble signo;

- *enteras*, con la terminología usual pero con las limitaciones indicadas.

Fenómenos

Su amplitud es considerable y su tipología variada, abarcando:

- **(tipo 1a)**: *opuestos aditivos* y *medidas "naturales relativas"* (González, 1998))
- **(tipo 1b)**: *escalas ordinales* (temperaturas, cronologías,, etc.)
- **(tipo 1c)**: fenómenos de aplicación del *grupo aditivo y ordenado (Z, +, ≤)*

En ninguno de los tres tipos tiene sentido la multiplicación como ley de composición interna. Únicamente podemos encontrar ejemplos coherentes de la multiplicación como producto externo. Su justificación así como la de la estructura completa de Z (anillo de integridad totalmente ordenado) quedan para el campo de los fenómenos matemáticos; el campo que realmente motivó la construcción formal del conjunto de los números enteros.

Tópicos fenomenológicos

Los temas o tópicos susceptibles de aplicación del pensamiento numérico natural relativo y del pensamiento numérico entero aditivo-ordinal de este apartado son muy numerosos. Algunos de los temas más comunes y a la vez más interesantes son los siguientes:

Comparación de numerosidades y posiciones
Demografía y cambios poblacionales
Listas y colas. Clasificaciones deportivas
Economía
Estimación-aproximación de cantidades
Estadística elemental
Juegos
Deportes
Móviles (ascensores, desplazamientos, etc.)
Geometría (recta numérica, plano de coordenadas, etc.)
Escalas (temperaturas, cronología, etc.)
Magnitudes físicas
Modelos duales (balanza, cubos fríos y calientes, partículas cargadas, etc.

Estos y otros tópicos proporcionan toda una gama de modelos que se pueden agrupar en torno a las tres categorías fenomenológicas mencionadas.

Modelos en el campo de la relatividad aditivo-ordinal

"Todos los modelos (concretos o referidos a contextos no matemáticos) llegan a un punto en el que no se puede seguir con garantías. En este momento, los enteros deben haber llegado a ser números por sí mismos, obedeciendo a ciertas reglas que son independientes de los modelos utilizados." (Leddy, 1977, pág. 28). Así, los modelos y representaciones de este apartado tienen limitaciones para ejemplificar, con la misma fidelidad y coherencia de principio a fin, la estructura completa de los números enteros, lo que no impide que, por su carácter intuitivo, su utilidad cotidiana y su potencialidad didáctica, sean utilizados también para ilustrar y trabajar la multiplicación, a pesar de los problemas formales o de coherencia derivados del desajuste en este punto con el original matemático. En lo que sigue, se incluye una breve exposición de los principales modelos, agrupados en las tres categorías mencionadas en el apartado 2.1.

Opuestos aditivos (adición)

• **Ganancias-pérdidas**, haberes-deudas (tener-deber) o ingresos-reintegros bancarios, son algunos de los modelos más familiares relacionados con el juego, la economía o los deportes.

• **Cubos fríos y calientes**. Jencks y Peck (1977) proponen un modelo que se apoya en la mezcla de unidades o cubos "fríos" y "calientes" que añadidos o retirados de un caldero modifican la temperatura de la mezcla. Para la multiplicación se utiliza el recurso de “añadir o quitar tantas veces un número determinado de cubos frios o calientes” (multiplicación externa o adición reiterada).

• **Cargas positivas y negativas** o partículas cargadas. Cotter (1969) y, posteriormente, Battista (1983) utilizan el modelo de partículas cargadas, en el que, al igual que en el anterior, se trata de relacionar las operaciones con números dirigidos con alguna interpretación física,. Las acciones "aditivas" son coherentes con las operaciones aritméticas de adición y sustracción de números enteros, mientras que las acciones "multiplicativas" requieren, como siempre, de significados distintos para el multiplicando y el multiplicador, si bien se trata de un modelo que puede ser más convincente que otros (nótese que la partícula neutra (0) posee las dos cargas opuestas, con lo que tienen sentido expresiones como: 0-(-1)=+1 o 0-(+1)=-1; igualmente, de un campo cargado con un número conveniente de partículas neutras, cuya carga sigue siendo cero, se pueden efectuar substracciones como: 0-(-6) o 0-(+14)).

• **Fichas de colores**; propuesto por Papy (1964) y por Dienes (1970), referenciados en González y otros (1990, págs. 130 y sigtes.).

• **Ábaco**; Es un modelo similar al anterior basado en la división de la recta numérica en dos partes “disjuntas” (estructura “natural relativa” (González, 1998, caps. 7 y 8)). Las dos partes se representan por separado, como si fuera un ábaco vertical de dos varillas marcadas con los signos + y - sobre las que se sitúan las cantidades y se realizan las operaciones. La novedad se encuentra en la utilización de una línea auxiliar horizontal (nivel cero) que marca la posición en la que se anulan por oposición las cantidades de signos contrarios emparejadas por debajo de ella. El resultado será la cantidad de fichas o marcas que quedan sin emparejar en la varilla positiva o en la negativa. Cuando no queda ninguna el resultado es cero.

Escala numérica (orden)

• **Deplazamientos sobre la recta** numérica. Las interpretaciones que se utilizan suelen ser las siguientes: dar pasos hacia adelante o hacia atrás (sumandos positivos y negativos) y mirar a la derecha o a la izquierda (operaciones de suma o resta);

• **Escalera** (Grupo albuquería, 1989);

• **“flipper”** o saltador (Ettline y Smith, 1978),

• **Globo** (Janvier, 1985). Modelo basado en un globo de aire caliente al que se le atan sacos de arena y/o globos de helio que le hacen bajar o subir. Se combinan las subidas y bajadas (desplazamientos en la recta) con las acciones de añadir o quitar elementos para configurar un sistema intuitivo en el que se siguen mezclando significados y operaciones de diferente naturaleza, aún incluso dentro de la estructura aditiva.

• **Medidas en la naturaleza**. Las alturas sobre el nivel del mar, las medidas relativas sobre planos y mapas, la localización sobre la esfera terrestre (longitudes, latitudes, meridianos, husos horarios) o las representaciones cartográficas, son modelos de la recta numérica entera.

• **Cronología**. Tanto la edad como el tiempo horario en sus distintas facetas así como las diferentes cronologías, en particular la occidental basada en años anteriores o posteriores al nacimiento de Cristo, constituyen ejemplos de aplicación de la estructura de orden de los números enteros.

• Otros: **temperaturas; ascensores; bolsa; balanza de pagos**, etc.

Grupo aditivo y ordenado (adición y orden)

• **Saldos bancarios**
• **Puntuaciones en el juego del golf**

4 Aritmética, Álgebra y Geometría: Origen histórico y campos de aplicación matemática de los números enteros

La ampliación de los números naturales a los números enteros fué *motivada por "necesidades matemáticas"* tales como:

- convertir la sustracción en una ley de composición interna;
- resolver todo tipo de ecuaciones;
- representar geométricamente funciones en todo el plano sin ninguna restricción;
- encontrar una justificación a la regla de los signos para la multiplicación.

y fué necesario *abandonar los intentos basados en la noción de cantidad*, ya que ninguno de ellos dió resultado; en primer lugar por las dificultades para dar una interpretación "real" a los números negativos como cantidades en todas las situaciones y, en segundo lugar, por los problemas mencionados con la multiplicación y la regla de los signos.

Fenómenos

En este contexto, los números enteros son *objetos útiles para fenómenos matemáticos y sus aplicaciones*, ya que dan significado y organizan los dos tipos de fenómenos siguientes:

- **(tipo 2)** *matemáticos*: aritméticos (extensión de la sustracción en N; operaciones aritméticas), algebraicos (ecuaciones y sistemas, polinomios), algebraico-geométricos (estudio y representación de funciones), geométricos (coordenadas, recta numérica) y otros;
- **(tipo 3)** *aplicaciones no matemáticas*: la extensa gama de fenómenos de otros campos que utilizan los números enteros.

Modelos no formales para la extensión de N a Z de acuerdo con el principio de permanencia de las leyes formales

Existen, entre otros, los siguientes modelos simbólicos y semiconcretos no formales (González y otros (1990, caps. 4 y 6)) basados en el principio de permanencia algebraico. Estos modelos, que hemos agrupado de acuerdo con las tres principales vías matemáticas no formales de acceso a los enteros: aritmética, algebraica y geométrica, se pueden considerar también como métodos para el tratamiento didáctico de partes o aspectos importantes de los números enteros.

• **Extensión aritmética por el método inductivo experimental (extrapolación inductiva)**

El modelo aritmético, junto al algebraico, es una de las representaciones estructuradas simbólicas más cercanas a la noción de número entero, en la medida en que se encuentra en el mismo corazón de su justificación y construcción. Sin embargo, el modelo, por sí sólo, no tiene la misma utilidad didáctica que si se asocia a determinados procesos de pensamiento. Esto es lo que ocurre con el método inductivo experimental, consistente en construir tablas en las que se incluye un número suficiente de casos ya conocidos y nuevos casos cuyos resultados se obtienen por inducción o generalización de las regularidades observadas (extrapolación inductiva (Freudenthal, 1973, 1983)). Se parte de los números naturales (que se van a considerar como positivos) y de la operación de sustracción, es decir, de la insuficiencia de N para dar validez a expresiones como 0 - 1, 3

- 4, etc. Los enteros negativos se introducen mediante tablas de restas con números naturales, estableciéndose a continuación un orden entre ellos, también por extrapolación inductiva, que será generalizado posteriormente a partir de la definición de orden en N ($a < b$ si y sólo sí existe un número c tal que $b = a + c$). Las operaciones se definen también generalizando las regularidades que se observan en tablas de operaciones.

• Extensión algebraica

La ecuación $x + a = b$ tiene solución en el conjunto de los números naturales para $a \leq b$. Para que tenga siempre solución se han de definir nuevos números (números negativos) como soluciones de las ecuaciones irresolubles en N. Estos números, por definición, son los opuestos adtivos de los correspondientes números naturales, que se identifican con los positivos. En este nuevo conjunto se definen las operaciones y una relación de orden, mediante la manipulación de ecuaciones, de manera que se mantengan los resultados y propiedades anteriores[8].

• Extensiones geométricas

Los números negativos surgen aquí en un marco geométrico para ampliar la semirrecta de los naturales (escala numérica) ó como objetos en sí mismos (vectores o "números dirigidos").

1) *Ampliación de la escala numérica natural*

Para describir la posición de un punto sobre una recta se necesitan: un punto de referencia, dos sentidos y una unidad de medida que nos permita considerar distancias entre puntos. A partir del cero se construyen dos semirrectas, en una de las cuales se sitúan los números naturales de la forma ya conocida y en la otra se sitúan puntos simétricos a los anteriores (misma distancia a cero), a los que se les puede asociar unos nuevos números (negativos) que denotan distinto sentido al de los naturales o positivos. Se ha establecido así una escala en la recta y un nuevo conjunto numérico que es una ampliación del conjunto de los números naturales. A partir de aquí será necesario definir las operaciones aritméticas, como aplicaciones de la escala en sí misma (traslaciones para la adición, dilataciones o ampliaciones para la multiplicación), y una relación de orden.

2) *Vectores o números dirigidos*

Dada una longitud entera a, se definen dos vectores libres con el mismo módulo y sentidos opuestos: +a (sentido a la derecha) y - a (sentido a la izquierda) también conocidos como **números dirigidos**. Las operaciones se definen mediante la aritmética ordinaria de vectores libres, analizando los casos que se pueden presentar, excepto la multiplicación, para la que es necesario acudir a algunos de los modelos anteriores.

III Aprendizaje y desarrollo cognitivo

1 Aprendizaje y desarrollo cognitivo en torno a los números naturales

Vamos a tratar aquí de manera muy resumida[9] la información directamente relacionada con el tema que nos ocupa, aunque los conocimientos en este campo se caracterizan por una excesiva centralización en los conceptos numéricos, con el consiguiente descuido de los conceptos cuantitativos y métricos, una cierta confusión entre el concepto de número natural y el concepto de cantidad discreta, la utilización exclusiva del término "recuento" para el caso de "medidas" de cantida-

[8] En la parte II del tema se encuentra un desarrollo más detallado de estos modelos.

[9] Para un desarrollo más extenso consultar: González (1998, capítulo 4).

des discretas así como del término “medida” para el caso de las cantidades contínuas y la ausencia importante de datos sobre la comparación aditiva.

Dividiremos el apartado en tres epígrafes: nociones numéricas, medida y resolución de problemas, en los que incluiremos exclusivamente la información y los comentarios oportunos relacionados con la relatividad aditiva y los números enteros.

1.1 La noción de número natural

Los aspectos relacionados con el tema que nos ocupa son los siguientes:

- El desarrollo del concepto de número natural.
- Las estructuras lógicas elementales y otros aspectos prenuméricos.
- El recuento y la acción de contar.
- Aspectos cardinal y ordinal del número natural.
- Aspectos básicos de la comprensión de las operaciones aritméticas así como los inicios de la operatividad: la comparación cuantitativa, métrica y numérica.

Las principales conclusiones sobre dichos aspectos son las siguientes:

- En relación con los trabajos de Piaget y colaboradores destacamos la *coherencia entre el número como síntesis de procesos lógicos y los planteamientos de la teoría de las formas conceptuales científicas* (Stegmüller, W., 1979), según la cual, los conceptos métricos se fundamentan en conceptos clasificatorios y comparativos o topológicos, en los que a su vez juegan un papel fundamental las estructuras ordinales.

- En relación con los aspectos cardinal y ordinal del número natural, los trabajos de Schaeffer (citados en Dickson, L. (1991)) ponen de manifiesto que *la faceta ordinal del número es captada por los niños con anterioridad a la cardinal y a las relaciones entre ambas*.

- En lo que respecta a la comparación cuantitativa, que en nuestra opinión se confunde en alguno de los trabajos con la comparación numérica, Murray, P. y Mayer, R. (1988), continuando los trabajos desarrollados por Siegler, R. S. y Robinson, M. (1982) y anteriormente por Schaeffer, B., Eggleston, V. H. y Scott, J. L. (1974), han puesto de manifiesto que *los niños pequeños son capaces de comparar y ordenar entre sí números de una cifra con carácter previo al dominio de la acción de contar, emitiendo juicios sobre el tamaño de los mismos*. Igualmente, en las etapas previas al recuento, son capaces de “. . *distinguir cuál de dos conjuntos es mayor o menor cuando al menos uno de los números es menor que cinco, a pesar de que no necesariamente comprenden las palabras mayor y menor*.” (Dickson, L. y otros, 1991, p. 185).

- Avesar, Ch.; Dickerson, J. (1987), en relación con la comparación cuantitativa de colecciones sencillas, han encontrado que la mayoría de los niños de 4 años utilizan *estrategias de comparación en las que interviene la correspondencia “uno a uno” para juzgar el “tamaño relativo” de dos colecciones*.

- Los niños utilizan antes “códigos relativos” (relacionados con la comparación y el orden en contextos cuantitativos) que “códigos absolutos” (cardinación; tamaño absoluto de una colección; medida de una cantidad) (Bryand, 1974).

Lo anterior pone de manifiesto que <u>*la comparación cuantitativa constituye un elemento básico para la adquisición de los conceptos numéricos*</u>, pudiendo ser previa en el desarrollo cognitivo al dominio del recuento y necesaria para establecer con seguridad la equivalencia de cardinales en cualquier situación así como para poder efectuar comparaciones numéricas y métricas.

- Las primeras nociones intuitivas relacionadas con la suma y la resta aparecen en edades tempranas (3 y 4 años) bajo la forma de *transformaciones cuantitativas elementales*, si bien se reconoce que las operaciones aditivas con números no son dominadas antes de los siete años. Igualmente se ha encontrado que *la comprensión de los significados de las operaciones aditivas se ve favorecida por la combinación, partición en sentido sustractivo y comparación de objetos, colecciones y longitudes contínuas*.

Los aspectos tratados se encuentran directamente relacionados con la medida de cantidades y con la resolución de problemas aditivos con números y "medidas naturales". Pero si ya se observa cierta confusión entre conceptos cuantitativos y numéricos, la situación se agrava cuando además intervienen los conceptos métricos.

1.2 Aprendizaje de las nociones de medida

Los resultados sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de las nociones métricas, además de ser escasos y estar circunscritos casi exclusivamente al ámbito de las magnitudes contínuas, se encuentran normalmente supeditados a los contenidos matemáticos más cercanos.

De los antecedentes más relevantes sobre las primeras experiencias con la medida y sobre los aspectos cognitivos elementales de la iniciación a la medida, podemos citar los trabajos de Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960) sobre el desarrollo de la comprensión del proceso de medida en el niño. En ellos se establece que *la conservación de la cantidad y la transitividad son elementos fundamentales para la construcción del concepto de medida y comunes a toda medición operativa*. La idea básica que subyace en este planteamiento es que las nociones elementales de la medida se fundamentan en las nociones numéricas.

Por el contrario, en Dickson, L. y otros (1990) se citan los trabajos soviéticos de investigación sobre el desarrollo de los conceptos métricos (pág. 105), que, a diferencia de los anteriores, conceden una importancia especial a los aspectos propios del proceso de medida, tales como: la estimación y aproximación, la comparación cuantitativa, la unidad de medida y el proceso de iteración de la misma en la actividad de medir. En este mismo sentido son de destacar, por último, las aportaciones de Chamorro, C. y Belmonte, J. (1990) y Segovia, I. y otros (1989), como obras divulgativas que incluyen sugerencias útiles para nuevas investigaciones.

Destacamos las siguientes consideraciones:

- La medida, a pesar de ser elemento central en la casi totalidad de los problemas aritméticos escolares, ha recibido muy poca atención en la investigación educativa, en comparación con la que se ha dedicado a otros aspectos del número y las operaciones aritméticas.
- Es necesario construir un modelo o soporte teórico que sustente las diferentes interpretaciones sobre el desarrollo cognitivo de los conceptos cuantitativos, numéricos y métricos. En nuestra opinión, sobre la base de los estudios epistemológicos realizados, dichos planteamientos teóricos deberían tener en cuenta:
    - el papel fundamental de las nociones cuantitativas como soporte de las nociones numéricas y métricas;
    - las relaciones que se establecen en el desarrollo cognitivo entre las nociones cuantitativas y las nociones numéricas y métricas, así como entre los propios conceptos numéricos y métricos entre sí;
    - la intervención tanto de las cantidades discretas como contínuas, atendiendo a las diferencias entre ellas;
    - el carácter general que tiene la medida como síntesis entre el número y la cantidad, así como las diferencias que de ello se deducen entre los conceptos correspondientes.

1.3 Resolución de problemas aritméticos aditivos y cognición

Los trabajos englobados bajo el epígrafe "resolución de problemas" tienen ya una sólida tradición en la investigación en Educación Matemática, con su máximo exponente en las obras clásicas y conocidas de Polya, G. (1954, 1957, 1966) y cuyas principales aportaciones se encuentran relacionadas y comentadas en textos recientes como: Puig, L.; Cerdán, F. (1988); Rico, L. y otros (1988) y Castro, E. (1991).

Comentamos a continuación las cuestiones más relevantes, estructuradas en dos enfoques teóricos básicos: las consideraciones de Vergnaud, G. sobre estados, transformaciones y campos conceptuales, y los trabajos relacionados con las teorías cognitivas del procesamiento de la información y con la estructura semántica de los enunciados de los problemas.

La resolución de problemas en el campo conceptual aditivo.

Los trabajos de Vergnaud, G.; Durand, C. (1976) y de Vergnaud, G. (1981 y 1982), continuados posteriormente por Conne, F. (1985), encuadran una parte del aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los números naturales y los números enteros en el ámbito de la resolución de problemas de aritmética elemental, dentro de lo que se conoce como 'campo conceptual aditivo'.

A través de los conceptos de relación y transformación y teniendo en cuenta la dualidad 'estado-transformación' se analizan los tipos de problemas aditivos y se obtienen evidencias empíricas sobre la diversidad y la amplitud de respuestas de los estudiantes, sobre las dificultades que tienen y los errores que cometen. Son estudios basados en las siguientes ideas básicas: inadecuación de la noción de ley de composición interna para caracterizar las relaciones numéricas; distinción entre cálculo numérico y cálculo relacional; necesidad de considerar un campo más amplio para el estudio de las relaciones aditivas; existencia de dos tipos diferentes de representaciones numéricas bajo la denominación de "estados y operadores" y existencia de cinco grandes categorías de relaciones numéricas aditivas.

A partir de las consideraciones anteriores, los autores citados realizan diversos estudios experimentales sobre problemas de transformación simple y de composición de transformaciones que proporcionan resultados dispares y difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone . Dichos resultados, de los que se concluye que *"la aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños (..) e incluso por los adultos"* (Vergnaud, G., Durand, C. (obra citada); pp. 124125), ponen de manifiesto la complejidad de las relaciones que intervienen, la posibilidad de que la categorización establecida no sea la más idónea y que la división entre estados y transformaciones deba ser revisada desde distintos puntos de vista, en particular, desde el enfoque epistemológico.

Los siguientes hechos y conclusiones avalan la necesidad de un replanteamiento teórico en el que debe ocupar un papel importante el campo conceptual de los números naturales relativos:

- Con respecto a los modelos de representación, Conne, F. (obra citada) menciona explícitamente la distorsión que se produce en el orden entre dos pérdidas con respecto al orden de los números enteros tomado como modelo para las transformaciones (pág. 284).

- La consideración de las transformaciones en un sentido como positivas y en el sentido contrario como negativas no obedece a un criterio uniforme, lo que deja abierta la posibilidad a múltiples confusiones y resultados dispares. Nuestra posición es que dicha asignación es arbitraria, a diferencia de lo que ocurre en los casos de aplicación específica de los números enteros.

- La distinción entre estados y transformaciones o entre número como estado y número como operador, parece que se refiere a dos manifestaciones o papeles diferentes del mismo concepto. Nuestra posición es que existen diferencias más profundas de carácter epistemológico que dan lugar a estructuras numéricas diferentes (Ver I.4).

- La distinción entre cálculo numérico y cálculo relacional, sometidos a reglas distintas según los casos, pone de manifiesto la posibilidad de que se estén mezclando conceptos numéricos de diferente naturaleza, en vista de que "sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos que están muy lejos de ser equivalentes entre sí." (Vergnaud, G.; Durand, C., (obra citada), pág. 125).

- La necesidad de utilizar tres signos de adición para representar cálculos numéricos de diferente naturaleza (Verganud, G., 1981, pág. 134), plantea serios problemas de legitimidad en la aplicación del conocimiento matemático formal y, por tanto, de compatibilidad entre los conocimientos matemáticos elementales y la aplicación de los mismos en contextos diversos. Se producen desajustes importantes entre las definiciones de las operaciones aritméticas usuales como leyes de composición interna y las aplicaciones concretas que funcionan en realidad como leyes de composición externa. Así lo ponen de manifiesto cuando afirman: "El estudio de los problemas de aritmética elemental pone en evidencia otras muchas dificultades que manifiestan la insuficiencia, si no inadecuación, de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas." (Vergnaud, G., Durand, C. (obra citada), pág. 106).

De todo ello, resulta dudoso que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros (o en terminología francesa, de los números "relativos") sea, por un lado, un buen modelo para abarcar toda la aritmética de "transformaciones" y, a la vez, un modelo único bajo el que se puedan tratar todas las situaciones y problemas que se consideran en los estudios. Así se ha puesto de manifiesto en González (1998), en donde se propone un marco teórico diferente para este campo.

La influencia del contexto en la resolución de problemas aditivos.

Bell, A. W. (1980) expone los resultados de una investigación realizada para poner de manifiesto como influyen diferentes dominios de aplicación de la composición aditiva de números sobre la resolución de problemas aditivos. Se trata de una línea de trabajo que orienta su atención hacia los números enteros o "dirigidos" dentro de un modelo didáctico llamado "enseñanza por diagnóstico".

El autor utilizó cuatro series de experimentos para averiguar como resuelven los alumnos una serie de problemas en los que interviene la composición aditiva: desplazamientos sobre una escala lineal y sobre un reloj, expresiones numéricas que se refieren a cambios positivos y negativos, niveles de dificultad relacionados con el contexto y el modo de presentación de los datos y, por último, composición de movimientos de dos figuras regulares. De sus planteamientos y conclusiones, resaltamos lo siguiente:

En las primeras etapas, la interpretación de las operaciones de adición y sustracción no incluye la verdadera composición aditiva. Los niños, no ven las operaciones como leyes de composición binarias, sino que distinguen entre los dos elementos considerando uno de ellos como el operador aditivo (estrategia conocida como "count on") (págs. 114 y 120).

Aunque el trabajo con números dirigidos proporciona experiencias sobre el modo de combinación de tales números, se observa sorprendentemente que no son integrados en un sistema numérico (pág. 121), lo que reafirma la hipótesis de que dominar los números naturales relativos no supone la realización correcta de tareas equivalentes con números enteros.

Bell sugiere que el estudio de estos problemas puede necesitar de un simbolismo particular diferente de las notaciones matemáticas stándards (pág. 141).

La estructura semántica de los problemas aditivos de enunciado verbal.

Se estudian problemas aritméticos de una sóla operación, denominados "problemas de una etapa"; se consideran diferentes componentes de análisis con sus variables correspondientes, entre los que destacan: la estructura lógica de los problemas, la componente semántica y la componente sintáctica (Nesher, P., 1982, pág. 28).

Existen varias categorías de problemas "de una etapa" (Puig, L., Cerdán, F., 1988) que varían según los autores y que se deducen del análisis global del significado del texto. Inicialmente, Heller, J. I., Greeno, J. G. (1978), establecieron tres categorías semánticas: Cambio, Combinación y Comparación. Posteriormente, dicha clasificación fué ampliada para incluir los problemas de Igualación (Carpenter, T. P., Moser, J. M., 1983).

Las *estrategias* de los niños para resolver los diferentes problemas de adición y sustracción, están fuertemente influenciadas por la estructura del problema, conclusión que es compartida por las investigaciones de Vergnaud, G. y Bell, A..

En cuanto a la *dificultad* de resolución se han encontrado los siguientes resultados generales: la adición es más fácil que la sustracción; el orden de dificultad es: cambio, combinación y comparación, aunque los dos primeros se invierten en el caso de la sustracción.

Nuestras conclusiones son las siguientes:

1) Las categorías de Cambio, Combinación y Comparación son pertinentes y suficientes para la clasificación de los problemas. Tanto la estructura semántica como la de relaciones, en forma de leyes de composición externa o interna, o la estructura lógica (Puig, L., Cerdán, F., 1988, pág. 96) quedan igualmente justificadas mediante las categorías mencionadas.

2) Es posible completar el cálculo relacional de Vergnaud haciendo intervenir un tercer modelo numérico (el de los números "naturales relativos") que permite enlazar dichos aspectos.

3) La cuarta categoría introducida por Carpenter, T. P., Moser, J. M. (1983), denominada de Igualación, resulta ser diferente a las otras tres, por tener una estructura lógico-semántica distinta y más compleja que la que poseen las anteriores.

4) Es necesario distinguir entre "problemas simples" y "problemas compuestos", que no coincide en general con la división usual en problemas de una etapa y de más de una etapa. Las tres categorías del apartado 1 pertenecen al grupo de problemas simples, mientras que los problemas de igualación, pertenecerían al grupo de problemas compuestos. Igualmente, algunos de los tipos de problemas establecidos por Vergnaud por ejemplo, composición de transformaciones, pertenecen a esta segunda clase, a diferencia del resto que son simples.

Teorías psicolingüísticas y pares de términos comparativos polarizados.

Lean, G. A., Clements, M. A., Del Campo, G. (1990), realizan un estudio en el que, además de comprobar que el principal factor determinante de la dificultad de los problemas es su estructura semántica, concluyen que los datos obtenidos están de acuerdo con las teorías psicolingüísticas sobre la adquisición de los pares de términos polarizados (como por ejemplo: "más" y "menos"). Algunos resultados de estas investigaciones son los siguientes (pág. 168):

Los términos "positivos" son comprendidos antes que los términos "negativos".

La percepción ligada a la situación de los objetos y colecciones a comparar, influye sobre los significados de los términos comparativos (pág. 169).

La interpretación de los significados de los enunciados de los problemas desde el punto de vista lingüístico es extraordinariamente complicada para los niños (pág. 170): "Creemos que nuestra investigación demuestra que muchos alumnos de la escuela elemental no están preparados lingüísticamente para los problemas semánticamente complejos de Cambio y de Comparación." (pág. 186).

Los niños no obtienen las respuestas correctas a los problemas de comparación directa mediante la aplicación de procedimientos de adición o sustracción (pág. 185).

Las cuestiones de comparación son especialmente difíciles, debido a la falta de conexión existente entre el lenguaje comparativo y sus significados usuales en las situaciones reales, el lenguaje formal y los símbolos escritos (pág. 188). Este lenguaje comparativo es la base de muchos temas de la escuela primaria y es importante, por ejemplo, en las actividades de medida.

Algunas conclusiones

a) Existen grandes diferencias en cuanto al dominio o nivel de dificultad entre las situaciones de comparación, cambio y combinación en las que sólo intervienen cantidades y los problemas escolares convencionales en los que aparecen números o medidas. Las primeras son sencillas y se dominan en edades tempranas, mientras que los segundos resultan complicados por las dificultades lingüísticas de los enunciados y por la intervención de los números.

b) En la práctica escolar usual se presta especial atención a los aspectos numéricos y a las relaciones entre el número y la medida, con descuido de las relaciones entre la cantidad y el número. Una mayor dedicación al recuento, al aspecto cardinal del número y a la noción intuitiva de suma en el sentido de combinación de números o medidas, en detrimento de la comparación de cantidades, números y medidas, del aspecto ordinal del número y de la suma y la resta como transformaciones, son factores que condicionan los resultados obtenidos.

c) El dominio del lenguaje comparativo requiere de experiencias concretas con cantidades y medidas. De esta forma, si el número se enseña al margen de dichas experiencias, es probable que se produzca una dicotomía entre lo concreto y lo abstracto que haga más difícil establecer los puentes necesarios entre las diferentes estructuras para que se produzca una comprensión gradual y completa de los conceptos y procedimientos que intervienen.

2 Números enteros: Aprendizaje y desarrollo cognitivo

Los estudios sobre los números enteros, además de ser escasos, se encuentran a menudo formando parte de trabajos más amplios en los que el interés se dirige hacia otros problemas de investigación. Las pocas publicaciones específicas que hemos encontrado sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de números enteros se refieren, en su mayoría, a los aspectos formales, simbólicos o de sintáxis de las operaciones aritméticas (González, J. L. y otros, 1990).

Por otra parte, dichos trabajos utilizan distintas terminologías para los números enteros; las más usuales son: “números dirigidos” y “números relativos”, que a veces aparecen combinadas con los términos: número negativo / número positivo y número entero. Todas ellas se refieren, bien a las aplicaciones concretas, bien al funcionamiento operativo del concepto matemático formal.

2.1 Aspectos generales

En lo relativo al desarrollo cognitivo, pensamiento numérico y aprendizaje de los números enteros, Aze, I. (1989) y Van den Brink (1990) exponen distintas experiencias de aula en las que se constata que niños pequeños entre 5 y 8 años de edad son capaces de manipular y simbolizar “números con signo” (lo que nosotros denominamos “números naturales relativos”).

Coquin-Viennot, D. (1985) realiza una investigación detallada sobre el concepto de “número relativo” en la que, a partir de la resolución de una serie de ejercicios y problemas elementales, establece una jerarquía de cuatro niveles de concepciones: nivel I) los relativos son tratados como naturales; nivel II) se separan los positivos y los negativos sin ningun tipo de unificación; nivel III) el conjunto de los relativos se trata formalmente y como un todo, apareciendo la relación de orden; se resuelven los problemas aditivos con soluciones en Z; nivel IV) la adición y multiplicación se utilizan correctamente para resolver problemas que no tienen solución en N.

2.2 Los números dirigidos en el contexto de la enseñanza por diagnóstico

Alan Bell y colaboradores (1979, 1980, 1982a, 1982b, 1986), además de la resolución de problemas, han trabajado sobre el aprendizaje y desarrollo cognitivo de los "números dirigidos". Los primeros trabajos fueron desarrollados por Shiu, C. M. (1979) en torno a la enseñanza de la adición y sustracción, en los que analiza las estrategias de los alumnos y el estado de sus conocimientos para abordar después el diseño de un proceso de enseñanza por conflicto cognitivo.

El estudio se realiza sobre la adición y sustracción de números dirigidos, la manipulación de expresiones (numéricas y algebraicas), la resolución de ecuaciones y las propiedades algebraicas de los números enteros. Las principales conclusiones son las siguientes:

- Las cuestiones de sustracción son mucho más difíciles que las de adición.
- Los alumnos utilizan los significados comunes que poseen sobre la sustracción.
- La mayoría de los errores son de origen sistemático.
- Los signos de las operaciones dominan sobre los signos numéricos.

En un estudio posterior Bell, A. (1986) presenta los resultados de una investigación en la que se sigue el mismo procedimiento: averiguar primero las dificultades y los errores de los alumnos en la resolución de problemas sobre listas y escalas, dinero y temperaturas, para pasar a continuación a diseñar un proceso didáctico adecuado.

2.3 Los "números relativos" en la teoría de los campos conceptuales

Además de los trabajos sobre resolución de problemas, Vergnaud, G. (1990) hace referencia a los aspectos cognitivos en torno a la estructura aditiva de los números enteros:

> *".. los niños tienen una triple experiencia de los números: como medidas (cardinales), como transformaciones y como relaciones de comparación. Si los cardinales abren la vía al concepto de número natural, las transformaciones y las comparaciones abren la vía al concepto de números con signo .." (pág. 24).*

Cita también lo que llama "teoremas en acción" relacionados con los números con signo:

".. un incremento de n queda cancelado por una disminución de n ..". (pág. 25).

En una transformación simple se ".. puede hallar el estado inicial, conociendo el estado final y la transformación, invirtiendo la transformación y aplicando esta transformación inversa al estado final." (pág. 25).

Los siguientes párrafos que completan la visión del autor:

> *"No hay muchos estudios sobre la adquisición de los números negativos; todos ellos revelan obstáculos de larga duración en los estudiantes de 15 y 16 años, especialmente cuando tienen que multiplicar un negativo por un negativo o cuando obtienen una solución negativa. Paradógicamente, como hemos visto antes, hay algunos aspectos de los números negativos que pueden ser fácilmente comprendidos por alumnos de la escuela primaria: una transformación negativa (disminución, pérdida, consumo, desplazamiento hacia atrás), una relación negativa (menos que, deuda) o incluso una abcisa negativa (por debajo del nivel de la planta baja).*
>
> *Esta paradoja puede resolverse en el nivel teórico, mediante la idea de que los números negativos consiguen su significado a partir de las diferentes clases de problemas que no pueden ser todos dominados en el mismo nivel. Las operaciones con números negativos tienen un diferente significado y un potencial diferente cuando representan una disminución de una cantidad, la cancelación o compensación de una transformación positiva, la inversión de una transformación o una relación, la resta de dos*

transformaciones o el cierre algebraico de un conjunto de números para la resta." (pág. 27).

Como estamos poniendo de manifiesto a lo largo de la exposición, la situación paradógica que se comenta puede que no sea debida únicamente a los motivos teóricos que se aluden, existiendo además elementos diferenciadores que no han sido considerados en los trabajos.

2.4 Errores y dificultades con números enteros

Cid, E. (1989) realiza un estudio exploratorio sobre las dificultades que muestran los sujetos ante la realización de 23 cuestiones de cálculo numérico, de entre las que se dedica una atención especial a los números enteros. El trabajo, centrado en aspectos meramente sintácticos, se enmarca dentro de una pretensión más amplia, tendente a construir un modelo único para los números enteros.

Desde una óptica similar, Hart, K. (1981) realiza un estudio sobre los errores que cometen los niños en la realización de operaciones aritméticas con números enteros. A través de un cuestionario de 20 ítems de adición, sustracción y multiplicación obtuvo los siguientes resultados:

- Los ejercicios de cálculo aritmético simple a nivel puramente simbólico son bastante más difíciles y provocan más errores en el caso de la sustracción que en el caso de la adición y multiplicación, existiendo además pequeñas diferencias entre estos.

- Con respecto a la adición, la mayoría de los alumnos utilizan con éxito el modelo de desplazamientos a lo largo de la recta numérica, existiendo poca diferencia entre los ítems de desplazamientos y los puramente numéricos. Los errores se producen por la utilización de la regla que parece consistir en *"ignorar el signo del primer entero y luego sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo*". Los ítems con respuestas correctas negativas tienden a ser ligeramente más difíciles que los que tienen respuestas positivas.

- Con respecto a la sustracción los sujetos ignoran el signo del primer entero, para después sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo. En los ejercicios en los que hay que restar un entero positivo la estrategia dominante parece ser: *"restar los numerales, seguido de intentos para determinar el signo de la respuesta*". En los ejercicios en los que hay que restar un entero negativo se aplica mal la regla: "dos menos hacen un más".

- El nivel de dificultad de los ejercicios varía según la edad, siendo más difíciles para los sujetos de 15 años que para los de 14, lo que puede ser debido al olvido y a la inconsistencia de los significados de las reglas aprendidas a la edad de 13 años.

- La mayoría de los alumnos de la escuela secundaria tienen una comprensión muy limitada de la sustracción y la multiplicación de enteros.

- Las diferencias entre la comprensión de la adición y la sustracción pueden ser debidas a los modelos comunes basados en la recta numérica. La adición tiene significados asociados a cambios o movimientos, mientras que en la sustracción se encuentran asociados a puntos; ambos significados no son mutuamente consistentes, lo que sugiere que la recta numérica debería ser abandonada y sustituida por un soporte basado en la cancelación. Esta solución, que es buena para la adición y sustracción, no lo es para la multiplicación, lo que resulta un inconveniente dificil de salvar.

Bruno; Martinón (1994) y Hernández (1997), realizan estudios sobre las estrategias de resolución de problemas con números negativos, en el que ponen de manifiesto que los alumnos resuelven bien los problemas cuando utilizan la recta numérica y otros procedimientos intuitivos (en general los entrevistados resuelven bien los problemas en el terreno no simbólico) pero tienen dificultades y cometen errores cuando los intentan resolver directamente mediante números y operaciones o cuando se les pide que justifiquen simbólicamente lo que han realizado intuitivamente. Las entrevistas ponen de manifiesto: a) la existencia de determinados desajustes entre la comprensión de los problemas por medio de la representación simbólica y la que se produce a través de otros tipos de representaciones (verbal, gráfica, etc.); desajustes que dificultan los necesarios procesos de traducción entre los diferentes sistemas de representación; b) cómo los alumnos tratan de solucionar sin éxito dichos desajustes; c) qué tipos de dificultades y errores aparecen y d) cuáles son las preferencias que manifiestan.

Otros errores constatados y recogidos en González y otros (1990) y en Iriarte y otros (1989) son los siguientes:

- Errores en situaciones de listas y escalas: "subir es aumentar", "ignorar el signo", "signo denota región", "confundir posición y movimiento";
- Diferencias al cruzar el cero en el manejo de temperaturas;
- Inversión y palabras clave engañosas: "fracaso en la inversión";
- Errores en la combinación de movimientos;
- La secuencia temporal como fuente de errores;
- Las operaciones aritméticas con números relativos como copias de las operaciones aritméticas con números naturales;
- Traslado del orden natural al conjunto de los números negativos;
- Identificación de los símbolos literales con números positivos.

2.5 Diferenciación cognitiva entre la estructura natural relativa y la entera

Hemos sometido a prueba y confirmado la siguiente hipótesis[10]: Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[11] dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales, es decir, orden total para los números enteros - orden parcial para los números naturales relativos.

Esta diferencia se manifiesta en cuatro tipos de tareas-esquemas diferentes: atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones; comparación-valoración global de regiones; comparación de medidas con valores numéricos "negativos"; comparación de medidas con valores numéricos de diferente signo o región. Las principales características diferenciadoras son las siguientes:

- en los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relativos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, no existe, en ningún caso, una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a las dos regiones opuestas.
- una comparación global de regiones es justa y determinada para números enteros y arbitraria e indeterminada para números naturales relativos.
- el orden entre los elementos de la "región negativa" es el usual entre números enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto), y el inverso al entero entre los números naturales relativos que se consideren como "negativos" (orden natural).
- existe conexión y homogeneidad entre regiones para los números enteros, lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones y desconexión entre regiones para números naturales relativos, lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a dichas comparaciones.

Se han utilizado cuatro cuestionarios para medir el diferencial semántico de los dos tipos de si-

[10] González (1998, capítulos 10 y 11).

[11] En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8º de Educación General Básica correspondiente a la edad de 14 años.

tuaciones, encontrándose que los términos y argumentos que utilizan los 77 sujetos encuestados para las situaciones enteras son característicos de una estructura de orden total, mientras que los elegidos para las situaciones relativas hacen referencia a una estructura dicotómica con una conexión imprecisa o indeterminada entre las partes, o son frases cuyo significado elimina toda posibilidad de existencia de conexión fija entre ellas; términos y argumentos que son adecuados para el tratamiento de situaciones opuestas en las que, las medidas se ajustan a una estructura de orden parcial isomorfa a la establecida teóricamente para los números naturales relativos.

Por tanto, el estudio pone de manifiesto que:

- A pesar de la instrucción matemática recibida por los sujetos, sustentada en el supuesto de que la estructura aditiva y ordinal del conjunto de los números enteros es el ámbito único e idóneo para el tratamiento de todas las situaciones planteadas en los cuestionarios, **existe una diferenciación cognitiva clara entre ambos tipos de situaciones**; sujetos con preparación suficiente distinguen, eligiendo los términos que creen más adecuados en ambos casos, entre una estructura de orden total y una estructura de orden parcial con inversión del sentido en la "región negativa".

- Las diferencias estructurales entre el campo conceptual de los números naturales relativos y el de los números enteros, no sólo son lógico-formales y fenomenológicas, sino que también son **cognitivas**, es decir, las estructuras de ambos campos conceptuales tienen status diferenciado como herramientas intelectuales.

3 Aprendizaje y desarrollo cognitivo en la iniciación al Álgebra

Los números enteros constituyen un contenido fundamental para la iniciación al Algebra. La resolución de ecuaciones y las manipulaciones algebraicas requieren de un dominio previo de las operaciones con números enteros y de las propiedades algebraicas del anillo Z. Sin embargo, la idea de que ".. el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética." (Kieran, C.; Filloy, E., 1989) ha desviado el centro de interés hacia los aspectos específicos del álgebra, en detrimento del estudio de las cuestiones relacionadas con el paso de la aritmética al álgebra.

Normalmente se parte de la aceptación del conocimiento existente sobre los conjuntos numéricos para centrar la atención en las relaciones entre la Aritmética y el Algebra así como en los aspectos específicamente algebraicos tales como: variables, resolución de ecuaciones, funciones, expresiones, etc.. Se exponen a continuación las conclusiones más relevantes.

Kieran, C.; Filloy, E. (1989) revisan las principales aportaciones sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Algebra, discuten los esfuerzos por desarrollar una teoría de la enseñanza/aprendizaje del Algebra y plantean algunas tendencias futuras. En la revisión realizada son de destacar las investigaciones sobre el marco aritmético de referencia, la forma en que los estudiantes 'ven' el signo igual, las dificultades con las convenciones de notación, los métodos de simbolización, la noción de variable y su uso, las expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones, las funciones y sus gráficas y, por último, el aprendizaje cuando se utilizan ordenadores. Asímismo, los autores plantean la necesidad de conjugar tres componentes: los modelos de enseñanza del álgebra, los modelos de los procesos cognitivos implicados y los modelos de competencia formal en la utilización del lenguaje algebraico.

En la misma linea, Gallardo, A., Rojano, T. (1988) y Filloy, E. y Rojano, T. (1989) exponen los principales resultados de investigaciones llevadas a cabo sobre la resolución de ecuaciones en dos niveles distintos: un nivel concreto, mediante la utilización del modelo geométrico basado en longitudes y superficies de figuras sencillas y en el conocido modelo de la balanza, y un nivel formal puramente sintáctico. En ambos niveles comparan los procesos de resolución de ecuaciones así como los aspectos semánticos y sintácticos involucrados.

Desde nuestro punto de vista los autores no han tenido en cuenta las siguientes consideraciones que hubieran modificado sustancialmente el diseño experimental y los enfoques e interpretaciones de los resultados obtenidos:

- En los modelos concretos utilizados existe una mezcla entre la comparación aditiva y la multiplicativa que debe ser analizada primero y por separado. Al mismo tiempo aparecen mezclados dos tipos de nociones métricas y numéricas con características diferenciadas, como son la medidas y números naturales relativos y los números enteros.
- En el planteamiento y resolución de ecuaciones con referentes concretos intervienen elementos de diferente naturaleza (cantidades, números y medidas) que deben ser deslindados previamente para poder conocer sus efectos y aislar sus posibles influencias sobre la producción de errores o la aparición de dificultades.
- No se tienen en cuenta factores tan importantes como: la escasa atención en la instrucción aritmética a los modelos concretos y en particular a los modelos cuantitativos experimentales; las deficiencias debidas a un tratamiento insuficiente y defectuosos de la estructura de orden y de las propiedades topológicas de los conjuntos numéricos o la distinción entre los aspectos intuitivos y 'naturales' y los aspectos meramente formales.

Creemos que los problemas del aprendizaje del álgebra escolar no son sólo los que se derivan de la propia sintáxis algebraica sino, además, los que tienen que ver con la sintáxis y, sobre todo, con la semántica involucradas en el proceso educativo previo sobre numeración y cálculo. En este sentido, estamos convencidos de que los resultados de las investigaciones sobre 'pensamiento algebraico' van a depender en gran medida de la clarificación de los procesos y fenómenos cognitivos que intervienen en la educación del 'pensamiento numérico'. El campo conceptual de los números naturales relativos es un paso en dicha dirección, situándose en el 'puente' entre la aritmética y el álgebra y aportando información relevante acerca de los aspectos más elementales de lo que se denomina ”pensamiento algebraico”.

IV Enseñanza y currículum

1 Métodos de enseñanza de los números enteros

El problema central se puede condensar en el interrogante: ¿Cómo enseñar los números enteros?. Las propuestas y experiencias conocidas son muy variadas, si bien, parece conveniente la utilización de métodos mixtos que contemplan diversos contextos y recursos en función del desarrollo didáctico y de los conceptos y procedimientos que se pretenden trabajar.

Una de las polémicas que han existido hasta ahora en torno a la enseñanza de los números enteros es la que se refiere a la conveniencia de utilizar modelos concretos. Asì, Leddy, T. (1977) cuestiona la utilización de modelos concretos hasta sus últimas consecuencias, constata las múltiples vías que utilizan los libros de texto para abordar el tema y asegura que en ninguno de ellos se consigue que el producto de dos números negativos sea intuitivamente obvio, a menos que se trate como extensión de modelos numéricos a través del principio de permanencia de las leyes formales. Más aún, propugna la introducción de los números enteros de forma axiomática en lugar de utilizar los pares ordenados, si bien supone que los alumnos han trabajado previamente los números “dirigidos” en una variedad de situaciones.

En el capítulo 7 de González, J. L. y otros (1990) se propone una metodología diversificada que parte de los aspectos más elementales e incluye una última fase en la que se trata el número entero como objeto matemático.

Otros autores como Cable, J. (1971) y Chang, L. (1985) proponen un proceso didáctico que parte de situaciones concretas como soporte de los aspectos más abstractos y formales que se han de trabajar posteriormente. Así lo manifiesta explícitamente Chang, L. cuando afirma: *"las reglas de las operaciones básicas con enteros pueden ser aprendidas después de que el estudiante ha comprendido los conceptos implicados"* (pág. 15). Por otra parte, mientras que Chang atiende sólo a la adición y sustracción recomendando la utilización de las monedas, los movimientos sobre la recta y las fichas de dos colores, único contexto, en opinión del autor, en el que se puede ver claramente el funcionamiento de la sustracción, Cable extiende su trabajo a las cuatro operaciones básicas, incluyendo todo un arsenal de modelos y situaciones didácticas.

El Colectivo Periódica Pura (1982) plantea una metodología más completa para el tratamiento didáctico de los números enteros. La idea básica consiste en abstraer, en primer lugar, el concepto de número entero de la estructura común a diversas situaciones para pasar, a continuación, a su ejercitación y aplicación a nuevas situaciones, a la adquisición de mecanismos y al aprendizaje de reglas y propiedades desde un punto de vista intuitivo. La construcción formal parece que queda al margen de la propuesta y, en todo caso, para ser tratada con posterioridad al proceso descrito anteriormente.

En el mismo sentido, siguiendo a Piaget, Galbraith, M. J. (1974) sugiere la distinción entre aspectos "concretos" y "formales", proponiendo la introducción de los números enteros en edades tempranas a partir de *"una colección de modelos que ilustren diferentes aspectos del problema"* (pág. 90). El autor pospone el tratamiento didáctico de las cuestiones más conflictivas (sustracción, multiplicación y división, así como la construcción formal) a aquéllos niveles en los que los alumnos se encuentren ya en el período de las operaciones formales.

Bell, A.; Shiu, C. y colaboradores (1981,1982 y 1986) han realizado trabajos sobre la enseñanza de los "números dirigidos" bajo la óptica del método denominado "enseñanza por diagnóstico" y que incluye la utilización de lo que también se conoce como "enseñanza por conflicto" (Bednarz, N., Garnier, C. (eds.), obra citada). El método tiene básicamente dos partes: una primera en la que se lleva a cabo un análisis de la comprensión de los alumnos sobre los aspectos básicos del tema mediante la identificación de los errores y las dificultades, y una segunda parte consistente en el diseño de un proceso didáctico orientado a subsanar dichos errores y dificultades mediante la utilización del conflicto-discusión.

Desde un punto de vista más teórico y en el contexto de la enseñanza de los conceptos aritméticos, Semadeni, Z. (1984) retoma el conocido principio de permanencia de las leyes formales así como algunas consideraciones didácticas sobre el mismo realizadas por Freudhental, H. (1973, 1984), para tratar de salvar los inconvenientes de su aplicación directa en el aula mediante la instauración de un método que él mismo denomina "principio de permanencia de lo concreto" (pág. 380). Se trata de una manera de evitar el dilema que se plantea, al tener que elegir entre forzar las situaciones concretas hasta sus últimas consecuencias o proceder formalmente.

En los casos conflictivos de la sustracción y la multiplicación de números enteros, el autor propone utilizar el conocido modelo de fichas o contadores de dos colores para la sustracción (págs. 389 - 393) y el producto externo de variables relativas, como son el tiempo discreto y el balance económico en el contexto de ingresos y gastos (págs. 393 - 394). La idea básica es expresada por el autor cuando afirma: *"Si no existe una motivación satisfactoria en la vida real para la sustracción de números negativos, es preferible una motivación semi-concreta adecuada, a la utilización* *de argumentos formales"* (pág. 390).

2 Juegos, material didáctico manipulativo y otros recursos

En Colectivo Periódica Pura (1982) y González y otros (1990), se proponen numerosos juegos y recursos para la enseñanza del tema. Además podemos citar los siguientes **juegos**:

- Para introducir o practicar *las cuatro operaciones básicas con números enteros* Frank, Charlotte (1969) sugiere la utilización del conocido juego del "guiso" o "tejo" con números enteros;

- Milne, E. (1969) propone un juego por equipos basado en dos ruletas en las que aparecen números y operaciones indicadas. Los equipos participantes van anotando los resultados parciales que deberán sumar para saber cuál de ellos alcanza una puntuación global más alejada del cero;

- Bernard, J. E. (1978) propone los clásicos juegos de construcción de cuadrados mágicos con números positivos y negativos;

- Molinoski, M. (1978) plantea un juego de cartas muy sencillo parecido al conocido juego de las siete y media;

- Ginther, J. L. (1976) recomienda y ejemplifica la utilización de juegos de cartas con fichas de dos colores para trabajar los cálculos con números con signo.

- Dados de números naturales y dos colores. Por parejas se utilizan dos dados de colores diferentes (positivos y negativos) y un papel donde se dibuja la semirrecta natural. Partiendo de un punto suficientemente elevado, cada jugador tira los dos dados por turno, resta los dos números y avanza o retrocede tantos lugares como indica el resultado dependiendo del color del número mayor. Llega un momento en que pueden aparecer resultados que "se salen" de la semirrecta, lo que se aprovecha para discutir la necesidad de ampliación, dar nombres a los puntos por debajo de cero y seguir jugando con ellos. Gana el jugador que consigue sobrepasar el número -10.

En lo que respecta al **material didáctico** podemos citar:

- Dexter, J. (1975) (tesis doctoral) expone los resultados de la enseñanza de las operaciones aritméticas con números enteros utilizando un material didáctico concebido por el propio autor. Consiste en una variante de las conocidas regletas encajables, pero duplicadas por la consideración de los dos signos, es decir: *"regletas opacas"* (números positivos) y *"regletas transparentes"* (números negativos);

- En Ringel, P. J. (1970), encontramos una materialización del modelo de la recta numérica para la suma y la resta de números enteros. En él se propone la utilización de dos reglas graduadas ordinarias que, convenientemente deslizadas o desplazadas una sobre la otra, permiten la realización manipulativa de cálculos de adición y sustracción.

Entre otros **recursos**, podemos citar los siguientes:

- Autobús escolar. A lo largo de diferentes paradas en las que suben y bajan personas se puede describir, con la ayuda de gráficos y números, lo que pasa en cada una de ellas y lo que ocurre el final del recorrido.

- Garaje. Salidas y entradas de vehículos y su relación con el número de vehículos estacionados en cada momento;

- Prensa: deportes, bolsa, etc (Fernández, Rico (1989)).

- Termómetro: medir temperaturas a diversas horas; medir temperaturas de mezclas, hielo, agua, etc.

- El ordenador. Los números enteros como transformaciones se pueden trabajar utilizando el micromundo del lenguaje Logo. La adición de enteros se considera como composición de transformaciones o movimientos sobre la recta y la negación como un operador sobre enteros.

- La calculadora gráfica permite visualizar distintas representaciones en el plano de coordenadas y utlizar pares ordenados de números enteros para representar puntos.

3 Actividades de aula y experiencias docentes

En este apartado exponemos algunos trabajos puntuales basados en actividades de aula y experiencias docentes realizadas en su mayoría en niveles inferiores a los usuales para el tratamiento de los números con signo. En la mayoría de dichas experiencias sólo aparece la comparación aditiva de medidas naturales y la iniciación a los números naturales relativos, lo que creemos que es correcto de acuerdo con nuestros planteamientos para el tratamiento didáctico del campo de la relatividad aditivo-ordinal.

Con dos niños de 9 años de edad y mediante*"un experimento de enseñanza constructivista"* (pág. 116) Thompson, P. W. y Dreyfus, T. (1988) exponen el desarrollo de una experiencia clínica sobre los números enteros como transformaciones utilizando el lenguaje Logo. Según los autores, los alumnos construyeron reglas de sustitución y operaciones mentales para negar cualquier número entero y determinar el signo y la magnitud de una suma. El objetivo fundamental era comprobar la posibilidad de organizar la instrucción sobre la aritmética de los números con signo de manera que facilitara el desarrollo de operaciones mentales implicadas en el pensamiento algebraico. Según los autores, una cuestión pendiente de investigación es la de averiguar si tal desarrollo conceptual *". . establece alguna diferencia en el modo en el que los estudiantes aprenden álgebra"* (pág. 130).

En la misma línea, Whiffing, P. y Aze, I. (1989) exponen otra experiencia con lenguaje LOGO en la que se opera con el número entero como transformación sobre la recta numérica.

Igualmente, Aze, I. (1989) presenta una serie de experiencias sobre números negativos con niños entre 5 y 9 años de edad. Con los más pequeños trabajó el doble sentido mediante el juego con dados de dos colores. Con niños a partir de los seis años y utilizando el mismo juego ya descrito, constató que los niños llegaban por sí mismos a la necesidad de ampliar la semirrecta natural.

Con niños de 5 años Van den Brink, D. J. (1990) realizó una experiencia con resultados positivos en la que se aprovecha el recorrido de un autobús escolar para trabajar las comparaciones y transformaciones de medidas naturales con la ayuda de gráficos. *La posibilidad, apuntada por algunos autores y que habría que confirmar en nuevas investigaciones, de que los niños de estas edades sean capaces de dominar una parte de la relatividad aditivo-ordinal, situaría en un mismo nivel los inicios de la aritmética natural y de la aritmética con números naturales relativos.*

No todas las experiencias de aula conocidas han dado resultados positivos. Así, Malpas, A. J. (1975) describe un intento fallido de enseñar la sustracción de números negativos a un grupo de alumnos brillantes de 8 y 9 años de edad. Utilizando la recta numérica para representar, mediante diagramas de desplazamientos en los dos sentidos, los gastos e ingresos producidos dentro de un contexto económico familiar, encontró dos tipos de dificultades: la confusión entre puntos y desplazamientos o entre "espacios" y puntos, y la dificultad que supone entender que *"restar una deuda es lo mismo que añadir una cantidad"* (pág. 5).

En una línea diferente a las anteriores y dentro de las pautas en las que se suele trabajar en la actualidad el tema de los números enteros en España, González, J. y otros (1989) plantean una experiencia en la que se introducen los números enteros por medio de una escalera, lo que constituye una variante del modelo de la recta numérica entera. La sustracción en este modelo no es necesaria y la suma traduce un desplazamiento hacia arriba o hacia abajo. Los números enteros pueden representar tanto puntos o escalones como desplazamientos de cantidades de escalones, lo que obliga a utilizar interpretaciones diferentes para los símbolos.

4 Una propuesta para el proceso didáctico

La construcción o definición matemática formal es un recurso didáctico inviable para iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros cuando es necesario hacerlo, entre otros motivos porque los alumnos no tienen los conocimientos ni el nivel de reflexión matemática formal necesarios para ello. Además, dicha construcción es el resultado final de un proceso complejo en el que, por un lado, tienen cabida métodos y modelos no formales, semiconcretos o en contextos matemáticos, que son más intuitivos que la construcción rigurosa para comprobar la necesidad de la ampliación de los números naturales y para acceder a los números enteros, y, por otro, han intervenido aplicaciones concretas que son buenos modelos parciales del original y que tienen hoy día un uso extendido y una apreciable importancia social y cultural. En definitiva, para iniciar la enseñanza de los números enteros en el momento oportuno es prácticamente obligado utilizar, separadamente o de forma combinada, los dos tipos de modelos y representaciones que hemos mencionado; ambos constituyen aproximaciones "informales" que culminarán, si es necesario, en la construcción formal, de acuerdo con el siguiente proceso:

a) prolongación "natural", aunque limitada, de N, abarcando sus principales aplicaciones concretas (tipo 1) y/o ampliación no formal de N en contextos semiconcretos y matemáticos (tipo 2); los primeros atienden a necesidades sociales, culturales y de motivación didáctica inicial y los segundos, más abstractos, añaden coherencia y justificación matemática a los conceptos y procedimientos, completan las aproximaciones parciales y facilitan el despegue hacia lo formal;

b) construcción formal motivada por el rigor y la validación matemática.

V Algunas conclusiones finales

• Los números enteros, son de naturaleza distinta a los números naturales, aunque algebraicamente y por comodidad se identifiquen, de tal manera, que la "ampliación" de N a Z, es puramente algebraica.

• Distinguimos entre los números enteros (Z), y los números naturales relativos (N_R). El salto de uno a otro encierra una actividad matemática importante: dotar a los números relativos de la categoría de objetos matemáticos, incardinados como tales en el resto de conocimientos de ese nivel, con una estructura y propiedades coherentes con dichos conocimientos.

• No se conoce por ahora un soporte intuitivo, concreto y completo para Z. Creemos que no es posible un modelo de tal tipo; Z, ya es en sí un modelo matemático que resume la estructura común a todas las situaciones del campo de la relatividad aditivo-ordinal, si bien su aplicación es parcial en algunos casos y requiere de adaptaciones particulares.

• Las situaciones relativas aditivo-ordinales y la comparación constituyen el gérmen de la diferencia de signo, de la estructura de orden total sin primer ni último elemento en dominios numerables, y por tanto, de la estructura aditiva de Z. Los inicios de éstos conceptos, se encuentran ya en el mismo proceso de construcción de las primeras nociones numéricas.

• La utilización del doble símbolo (+, -) para expresar la diferencia entre números enteros positivos y negativos, no es un hecho menos arbitrario que su utilización para representar las operaciones aritméticas usuales de adición y sustracción. Dicho de otra manera, existe una relación muy directa entre los significados atribuídos a dichos símbolos en ambos contextos, fundamentalmente debido al carácter operacional del número relativo así como al tipo de situaciones en las que aparece (comparaciones y transformaciones), las cuales se desenvuelven en una estructura marcadamente aditiva.

• La multiplicación como ley de composición interna, sólo tiene sentido en la Matemática, siendo la única forma de compatibilizar la construcción formal con las teorías matemáticas conocidas.

• La imágen tan extendida y popular del número como representación de cantidades en su sentido "absoluto", supone un obstáculo para el número natural relativo y para el número entero. Si ésto es así, sería necesario trabajar el doble aspecto “absoluto-relativo” desde los mismos inicios de la cuantificación.

• La justificación didáctica del tema no está únicamente en enseñar-aprender nuevos números, sino en establecer y consolidar ideas y esquemas que son fundamentales para el resto de la Matemática: la estructura de orden total sin primer ni último elementos en dominios numerables, el doble signo, la reversibilidad operatoria, la resolución de ecuaciones y los fundamentos del álgebra en general o la relativización de la medida.

• No es correcto relegar el doble signo y el número entero en su totalidad a niveles avanzados del currículum, cuando parece que las relaciones más elementales que sustentan el concepto se manifiestan ya en las manipulaciones cuantitativas básicas, en las acciones en las que se transforman y comparan cantidades.

• La comparación cuantitativa es una actividad básica natural del ser humano de cualquier cultura, mientras que la actividad de contar es un instrumento más sofisticado para precisar las comparaciones y determinar cardinales y ordinales. En este sentido, las construcciones matemáticas por pares ordenados constituyen una materialización formal de la estructura comparativa natural.

• En las relaciones parte-todo existe un proceso de cuantificación relativa pero esta vez de tipo multiplicativo. Mientras que la comparación multiplicativa parece haber sido considerada en el currículum elemental, quizás debido a que se encuentra dentro del paradigma número-cantidad, la comparación aditiva no es tenida en cuenta explícitamente, cuando es precisamente la que da lugar a la estructura de orden total sin primer ni último elementos en dominios numerables, a la primera estructura de grupo ordenado, y a las primeras nociones algebraicas de tipo aditivo.

• En la actualidad se provoca un **obstáculo didáctico** que es corregible abordando las operaciones aritméticas desde la óptica de las transformaciones o acciones relativas con cantidades y medidas en un contexto dinámico y potenciando la estructura comparativa, el orden, la reversibilidad operatoria, las relaciones asimétricas y transitivas y la abstracción del número como relación, que llevará a la abstracción del número como estado, como representación de cantidades y medidas aisladas.

Referencias

Arcaví, A.; Bruckheimer, M. How shall we teach the multiplication of negative numbers?. Mathematics in School, v. 10(5), págs. 31-33. 1981.

Avesar, Ch.; Dickerson, D. J. Children's judgments of Relative Number by one-to-one correspondence: A planning perspective. Journal of experimental child psychology; 1987; 44: pp. 236-254.

Aze, I. Negatives. ¿Are they for little one’s?. Micromath, spring 1989, págs. 15-17.

Bartolini, P. Addition and subtraction of directed numbers. Mathematics Teaching, nº 98, págs. 34-36. 1976.

Battista, T. M. A complete model for operations on integers. Arithmetic Teacher, v. 30, págs. 26-31. 1983.

Bednarz, N.; Garnier, C. (eds.). Construction des Savoirs. Obstacles et conflicts. Otawa. Canadá: Agence d'ARC, inc. 398 pp.; 1989; ISBN: 2-89022-152-0.

Bell, A. W. Developmental studies in the additive composition of numbers. Recherches en Didactique des Mathematiques: pp. 113-141.

Bell, A. Directed numbers and the bottom up currículum. Mathematics Teaching; 1982; (102): pp. 28-32.
Bell, A. Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. Enseñanza de las Ciencias; 1986; 4(3): pp. 199-208.
Bell, A. Looking at children and directed numbers. Mathematics Teaching; 1982; (100): pp. 66-72.
Bernard, J. E. Constructing magic square number games. Arithmetic Teacher, v. 26(2), págs. 36-38. 1978.
Brousseau, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques; 1986; 7(2): pp. 33-115.
Brousseau, G. Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Bordeaux: Thèse d'Etat; 1986.
Bruno, A.; Martinón, A. Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. Suma 16/1994, págs. 9-18. 1994
Bruno, A.; Martinón, A. La recta en el aprendizaje de los números negativos. Suma 18/1994, págs. 39-48. 1994.
Cable, John. The ground from which directed numbers grow. Mathematics in School; 1971; 1(1): pp. 10-12.
Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. edit. Addition and subtraction: A cognitive perspective. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 1982.
Carpenter, T. P.; Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts. En **Lesh, R.; Landau, M. (eds.)**.- Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Academic Press, New York. 1983.
Carpenter, T. P.; Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education, v. 15, págs. 179-202. 1984.
Castro, E. Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. 1991.
Castro, E. Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años). Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1994.
Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. Números y operaciones. Madrid: Síntesis. 1988.
Chamorro, C.; Belmonte, J. M. El problema de la medida. Madrid: Síntesis. 1994.
Cid, E. Estudio de las dificultades de los alumnos en el cálculo de expresiones numéricas. Universidad de Zaragoza: Trabajo no publicado; 1988.
Colectivo Periódica Pura. Didáctica de los números enteros: Nuestra Cultura; 1982.
Condamine, M. Algébre. Colección P. Vissio. 1971.
Conne, F. Calculs numeriques el calculs relationnels dans la resolution de problémes d'arithmetique. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 5(3), págs. 269-332. 1985.
Coquin-Viennot, D. Complexité Mathematique et ordre d'acquisition: Une hierarchie de conceptions a propos des relatifs. Recherches en Didactiques des Mathématiques; 1985; 6(2-3): pp. 133 - 192.
Cotter, S. Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers. The Arithmetic Teacher, v. 16(5), págs. 349-353. 1969.
Crowley, M. L.; Dunn, K. A. On multiplying negative numbers. The Mathematics Teacher, v. 78(4), págs. 252-256. 1985.
Chang, L. Múltiple methods of teaching the addition and subtraction of integers. Arithmetic Teacher, v. 33(4), págs. 14-19. 1985.
Chevallard, I. Sur les difficultés "protomathématiques": IREM d'Aix-Marseille; 1979.
Chevallard, I..- Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au college. Petit x nº 19, pp. 43-72. 1989.
Chilvers, P. Sam the sentry. A consistent model for operations on directed numbers. The Australian Mathematics Teacher, v. 40(4), págs. 2-4. 1984.
Chilvers, P. A consistent model for operations on directed numbers. Mathematics in School, v. 14(1), págs. 26-28. 1985.
Dexter, J. The development of a product for the concrete manipulation of negative numbers. Teacher College: Columbia University; 1975. 155 p. U.M.I. (Dissertations abstract): Information Publications international Ltd. White Swan House, Godstone, Surrey RH9 8LW, England. Telex: 95212 IPI G.
Dickson, L. y otros. El aprendizaje de las matemáticas. Labor-MEC, 1991.
Douady, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques [Thèse d'Etat]. París: Université París VII; 1984.
Dubisch, R. A proof that (-) x (-) = (+). The Mathematics Teacher, v. 64(8), pág. 750. 1971.
Eastwood, M. More models for directed numbers. Mathematics in School, v. 17(3), págs. 34-35. 1983.
Engelhardt, J. M. Analysis of children's computational errors: A qualitative approach. British Journal of Educational Psychology; 1977; 47: pp. 149-154.
Etayo, J. J. Notas sobre las ideas de cualidad y relación en Matemáticas. Cursillos sobre Didáctica Matemática; 1970, Madrid CSIC; v. III: pp. 38-53.
Ettline, J. F. y Smith, L. M. Flipping over numbers. Mathematics Teacher, v. 76(4), págs. 54-55. 1978.

Fernández; A.; Rico, L. Prensa y Matemáticas. Madrid: Síntesis. 1989.
Filloy, E.; Rojano, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics; 1989; 9(2): pp. 19-25.
Fischbein, E. Intuition in Science and Mathematics. An educational approach. Holland: Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company; 1987.
Frank, Charlotte Play Shuffleboard with negative numbers. The Arithmetic Teacher, v. 16(5), págs. 395-397. 1969.
Freudenthal, H. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht. Holland: D. Reidel Publishing Company; 1973.
Freudenthal, H. Didactical phenomenology of Mathematical structures. Dordrecht. Holland: D. Reidel Publishing Company; 1983; ISBN: 90-277-1535-1.
Friedlander, A. The Steeplechase. Mathematics Teaching, 80, págs. 37-39. 1977.
Galbraith, M. J. Negative numbers. Int. Journal of Mathematics Education Sci. and Technol.; 1974; 5: pp. 83-90.
Gallardo A. y otros. Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones. Recherches en Didactique des Mathématiques. En prensa. Pág. 3.
García-Baró, M. Categorías, intencionalidad y números. Tecnos, 1993
Ginther, J. L. Some manipulative activities for Arithmetic Drill. School Science and Mathematics, págs. 152-156. 1976.
Glaeser, G. Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques; 1986; 2(3): pp. 303-346.
Godement, R. Álgebra. Tecnos: Madrid. 1967.
González, J.; Jiménez, M. Aproximación a los números enteros a partir de una escalera. Suma; 1989; 2: pp. 29-33.
González, J.L. Los números naturales relativos. Granada: Comares. 1998.
González, J.L.; Iriarte, M. D.; Vargas-Machuca, I.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Ortiz Comas, A.; Sanz, E. Los números enteros. Madrid: Síntesis; 1990.
Grupo albuquería Aproximación a los números enteros a partir de una escalera. Suma, nº 2, pp. 29-33. 1989.
Hart, K. M.; Brown, M. L.; Küchemann, D. E. y otros. Children's understanding of Mathematics: 11-16: John Murray; 1981: Cap. 6: Positive and negative numbers.
Hernández, J. Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos. Tesis Doctoral inédita. Universidad de la Laguna. 1997.
Hollis, L. Y. Multiplication of integers. The Arithmetic Teacher, v. 14(7), págs. 555-556. 1967.
Husserl, E. Philosophie de l´arithmétique. París: Presses Universitaires de France, 1992.
Iriarte, M. D. y otros. Test: Los enteros dentro de un contexto. Actas Congreso Enseñanza de las Ciencias. Santiago de Compostela; 1989: pp. 291-292.
Janvier, C. Comparison of models aimed at teaching signed integers. En: 9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics; Jul. 1985; 1/22-6: pp. 135 - 140.
Jencks, S. M.; Peck, D. M. Hot and cold cubes. Arithmetic Teacher, v. 24(1), págs. 70-71. 1977.
Johnson, D. R. Making - x meaningful. The Mathematics Teacher, v. 79(7), págs. 507-510. 1986.
Kamii, C. El niño reinventa la aritmética. Visor. 1986.
Kieran, C.; Filloy, E. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias; 1989; 7(3): pp. 229-240.
Klein, F. Matemática elemental desde un punto de vista superior. Cap. II. Madrid; 1927.
Lean, G. A.; Clements, M. A.; Del Campo, G. Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: a comparative study. Educational Studies in Mathematics; 1990; 21: pp. 165-191.
Leddy, T. Mis-directed numbers. Mathematics Teaching, 78, págs. 26-28. 1977.
Ledermann, W. Children Choice. Mathematics in School, v. 1(7), pág. 11.1972.
Lewis, A. B.; Mayer, R. E. Student's miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology; 1987; 79(4): pp. 363-371.
Lizcano, E. Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Gedisa-MEC. 1993.
Luth, L. M. A model for arithmetic of signed numbers. The Arithmetic Teacher, págs. 220-222. 1967.
Malpas, A. J. Subtraction of negative numbers in the second year: anatomy of a failure. Mathematics in School, v. 4(4), págs. 3-5. 1975.
Milne, E. Disguised practice for multiplication and addition of directed numbers. Arithmetic Teacher, v. 16(5), págs. 397-398. 1969.
Molinoski, M. Black Jack. Arithmetic Teacher, v. 25(5), pág. 52. 1978.
Mosterín, J. Conceptos y teorías en las Ciencias. Madrid: Alianza Universidad; 1984.
Murray, P.; Mayer, R. Preschool children’s judgments of Number Magnitude. Journal of Educational Psychology,

v. 80, nº 2, págs. 206-209. 1988.

Nesher, P. Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En **Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (eds.)**.- Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey. 1982.

Nortes, A. Matemáticas y su Didáctica. Autor: Tema DM. Madrid. 1993.

Orman, G. V. Two aspects concerning "General Theory of Directed Numbers" by Franco Spisani and an application. International Logic Review, v. 32, págs. 67-71. 1985.

Palermo, D.S. More about "less": A study of language comprehension of "less". Developmental Psychology; 1973; 10: pp. 827-829.

Peterson, J. C. Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (- 1) x (- 1) = (+ 1). The Arithmetic Teacher, v. 19(5), págs. 396-403. 1972.

Phillips, E. R. Negative number x negative number gives positive number: an understandable proof for High School students. School Science and Mathematics, v. 71(9), págs. 797-800. 1971.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. The child's conception of geometry. London: Routledge and Kegan, P. 1960.

Piaget, J. Introducción a la Epístemología Genética. El pensamiento matemático. Buenos Aires: Paidos; 1978.

Piaget, J. Investigaciones sobre la contradicción. Madrid: Siglo XXI; 1978.

Piaget, J. Tratado de lógica y conocimiento científico. Buenos Aires: Paidós; 1979.

Piaget, J.; Beth, E. W. Epístemología Matemática y Psicología. Barcelona: Crítica; 1980.

Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. y otros. La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza Editorial S. A. Madrid 3-edic., 1983.

Polya, G..- Como plantear y resolver problemas. Trillas. México, 1965.

Polya, G..- Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos. Madrid, 1966

Puig, L.; Cerdán, F. Problemas aritméticos escolares. Síntesis. Madrid, 1988.

Pycior, H. M. George Peacock and the British origins of Symbolical Algebra. Historia Mathematica; 1981; 8: pp. 23-45.

Rico, L. y Gutiérrez, J. (edit.). Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria. ICE Universidad de Granada. 1994.

Richardson, M. Fundamentos de Matemáticas. CECSA. Madrid. 1976.

Riley, M. S.; Greeno, J. G.; Heller, J. I. Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En **Ginsburg, H. P. (ed.)**.- The Development of Mathematical Thinking. Academic Press, New York. 1983.

Ringel, P. J. Sliding into negative integers. Grade Teacher; 1970; 87(6): pp. 41, 176-177.

Rossini, R. A propos des nombres relatifs. Math. Ecole, 25(121), págs. 18 - 23. 1986.

Russell, B. Ciencia y Filosofía. Madrid: Aguilar; 1973.

Russell, B. Introducción a la Filosofía Matemática. Barcelona: Paidós; 1988.

Schaeffer, B.; Eggleston, V. H.; Scott, J. L. Number development in young children. Cognitive Psychology nº 6, págs. 357-379. 1974.

Schoenfeld, A. Mathematical problem solving. Academic Press. 1985.

Schoenfeld, A..- Cognitive Science and Mathematics Education. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. 1987. Hillsdale, New Jersey.

Schübring, G. Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. Petit X; 1986; (nº12): pp. 5 - 32.

Schultz, J. E. Why I don't have any examples of negative numbers. The Arithmetic Teacher, v. 20(5), pág. 365. 1973.

Segovia, I. y otros. Estimación en cálculo y en medida. Síntesis. Madrid, 1989.

Semadeni, Z. A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. Educational Studies in Mathematics; 1984; 15: pp. 379-395.

Shiu, C. M.; Bell, A. W. Directed numbers 1, 2, 3. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham: unpublished papers; 1981.

Sicklick, F. P. Patterns in integers. The Mathematics Teacher; 1975; 68(4): pp. 290 - 292.

Snell, K. S. Integers. Introduction of directed numbers. The Mathematical Gazette, v. 54, págs. 105-109. 1970.

Stegmüller, W. Teoría y experiencia: Ariel; 1979.

Thompson, P.; Dreyfus, T. Integers as transformation. Journal for research in Mathematics Education; 1988; 19(2): pp. 115-133.

Van den Brink, J. Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen. Didaktief, maart 1990, págs. 20-22.

Vergnaud, G.; Durand, C. Structures additives et complexité psychogénetique. Revue Francaise de Pédagogie; 1976; 36: pp. 28-43.

Vergnaud, G. L'enfant, la Mathématique et la réalité: Peter Lang; 1981.

Vergnaud, G. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. En: **Bednarz, N.; Garnier, C.** (Dir.).- Construction des savoirs. Obstacles & conflicts. CIRADE. Agence d'ARC inc. Otawa. 1989, pp. 33-40.

Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales. En: **Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.)**.- Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa. Cinvestav - IPN. México D. F., págs. 88-117. 1993.

Weiner, S. L. On the development of more and less. Journal of Experimental Child Psychology; 1978; 26: pp. 271-287.

Whiffing, P.; Aze, I. A directed number starter. Micromath, spring 1989, págs. 14-15. 1989.

Zacharías, J. R. The importance of quantitative thinking: A matter of Math. National Elementary Principal, 56, págs. 20-27. 1976.