

Capítulo 8

Diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros.

8.1.- Introducción.

El número natural relativo se presenta en situaciones y problemas de comparación aditiva, mientras que el número entero está relacionado, básicamente, con situaciones de escalas y medidas sin principio ni fin con una referencia central o con aquéllas otras en las que, por diversos motivos (cero no accesible, interés centrado en torno a unos valores determinados, resolución algebraica, etc.), se efectúa un cambio de referencia u origen en series de valores discretos representables inicialmente mediante números naturales. Esta diferenciación, que no se contempla como tal en el currículum y que puede ser origen de desajustes didácticos, se ha salvado tradicionalmente mediante la aplicación de los conceptos, procedimientos y estructuras de los números naturales o enteros. Esta solución, que no tiene muchos inconvenientes desde el punto de vista formal, presenta, sin embargo, serios inconvenientes desde la perspectiva de la práctica escolar, en la que se constata la necesidad de una selección cuidadosa de los ejemplos, evitando determinadas situaciones y apelando a la abstracción.

El panorama merece, por tanto, un detenido exámen desde el punto de vista educativo, ya que el esquema usual de trabajo lleva al alumno a aplicar conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones que no cumplen las condiciones necesarias, a englobar conceptos diferentes bajo una misma estructura, a confundir los números naturales con los números naturales relativos y con los números enteros, en el paso del terreno formal al aplicado o viceversa, y a confundir las operaciones aritméticas entre sí y con determinadas acciones sobre cantidades.

El modelo numérico que ha sido preciso considerar para completar el esquema formal tratado en el capítulo anterior, se apoya en la existencia de cantidades y medidas que presentan características peculiares y diferenciadas de las que poseen las cantidades y medidas naturales y enteras. De hecho, las medidas naturales relativas proceden formalmente de aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia (comparación de medidas naturales

o enteras), lo que supone una diferencia básica en cuanto a la naturaleza lógico-formal de los conceptos de cantidad, número y medida. Además de esta diferencia formal, debida a las características del proceso constructivo, encontramos dos aspectos que se presentan bajo características también diferentes, como son la ley de composición aditiva y el orden, que en los dos casos considerados presentan las diferencias que aparecen en los cinco epígrafes de la figura 8.1.

En este capítulo, además de explicitar y analizar las diferencias estructurales y lógico-formales entre los dos tipos de números para justificar y reforzar el planteamiento realizado en el capítulo anterior, se pretende completar el estudio teórico mediante un análisis minucioso de dichas diferencias desde el punto de vista de los fenómenos que intervienen y de la representación del conocimiento implicado, lo que involucra las tres estructuras básicas mencionadas en el apartado 7.6 del capítulo 7: la estructura lógico-formal, la estructura fenomenológica y la estructura de las funciones cognitivas. El centro del análisis, en este caso, será la estructura lógico-formal de los campos conceptuales comparados.

Como consecuencia de este estudio esperamos detectar cuestiones de orden práctico mediante las que poner de manifiesto algunas diferencias cognitivas entre los números naturales relativos y los números enteros. Esto permitirá corroborar que ambos campos conceptuales presentan diferencias cognitivas y no sólo formales, es decir, tienen status diferenciado como herramientas intelectuales. De ser así, una consecuencia didáctica sería la necesidad de un tratamiento específico, gradual y diferenciado para ambos tipos de números.

Para cubrir la doble finalidad descrita (ilustrar, justificar y reforzar los planteamientos teóricos y preparar el estudio empírico) abordaremos, en primer lugar, las diferencias ordinales y algebraicas entre los dos tipos de números así como algunas consideraciones sobre las relaciones entre las diferencias lógico-formales y las diferencias cognitivas; en segundo lugar, como paso previo al estudio empírico, desarrollaremos un análisis ejemplificado de las diferencias estructurales tomando como referencia las diferencias lógico-formales.

8.2.- Diferencias ordinales y algebraicas entre números naturales relativos y números enteros.

De las consideraciones generales realizadas en los capítulos anteriores, así como de la comparación de las propiedades de la estructura entera y de la estructura natural relativa, se identifican cinco diferencias lógico-formales que se reflejan en el esquema de la figura 8.1.

Sobre los términos utilizados en el esquema, haremos las siguientes precisiones:

- La inversión del orden en una de las dos “regiones” que conforman la estructura natural relativa, se produce con respecto al que cabría esperar si dicho orden fuera total. En este sentido, el orden entre los números enteros negativos es justo el opuesto al que existe en el subconjunto de números naturales relativos considerados usualmente como “negativos”.

- Al decir que la estructura ordinal de los números naturales relativos posee primer elemento, queremos decir que los dos ceros relativos constituyen primeros elementos, respectivamente, para cada una de las dos series ordenadas que forman el conjunto.

- Aunque se explicará con detalle en el apartado 8.4, hemos utilizado el término “continuidad” en el sentido de “conexión entre regiones”. El cero entero hace las veces de puente entre los números positivos y negativos, permitiendo el paso (entendido como posibilidad de efectuar medidas discretas entre valores de diferente signo) de una región a la otra, lo que conlleva la comparabilidad de regiones, medidas y números de diferente signo. Por el contrario el doble cero natural relativo establece un corte entre regiones que impide la conexión y la posibilidad de comparación. Aunque se deduce del tipo de orden que se establece en el apartado a), hemos preferido tratar esta diferencia por separado, teniendo en cuenta que se trata de un aspecto crucial que puede producir numerosos errores específicos.

Estructura entera (números enteros ordinarios con la estructura de grupo abeliano y ordenado para la suma)	Estructura natural relativa (números naturales relativos)
a).- Orden total.	a).- Orden parcial (natural doble con inversión en la "región negativa").
b).- Sin primer elemento.	b).- Con primer elemento.
c).- "Continuidad" de medidas al cruzar el cero.	c).- "Discontinuidad" de medidas. (no tiene sentido cruzar el cero).
d).- Cero único (elemento neutro para la suma).	d).- Cero doble (dos elementos nulos para la adición).
e).- Composición aditiva: adición entera	e).- Composición aditiva: adición natural y anulación-compensación.

Figura 8.1.- Diferencias básicas entre las estructuras entera y natural relativa.

- Las diferencias d) y e) son de tipo algebraico y compatibles con el orden establecido. En ambos casos, la composición aditiva es una ley de composición interna definida mediante una proposición simple para los números enteros y mediante una compuesta para los números naturales relativos. En este caso además de la adición natural, para la que se verifica la estabilidad de cada una de las dos “regiones”, es obligado añadir la “anulación-compensación aditiva” para definir la composición de elementos de diferente signo.

8.3.- Diferencias lógico-formales y diferencias cognitivas.

Las diferencias que se han indicado en el apartado anterior deben reflejarse como tales en la representación mental y simbólica de situaciones relativas cotidianas en las que

intervienen ambos tipos de números, es decir, las diferencias estructurales de carácter lógico-formal se pueden manifestar también desde el punto de vista cognitivo (conceptos, significados y representaciones) y desde el punto de vista sintáctico (lenguaje, símbolos y reglas). Si esto es así, como sostenemos en el trabajo y nos proponemos poner de manifiesto en el estudio empírico, parece lógico que se den confusiones y errores que deben influir negativamente en la resolución de problemas y en aprendizajes matemáticos posteriores. Utilizar el concepto y la estructura aditiva de los números enteros en situaciones en las que no funcionan - a menos que se prescindiera de cierto rigor y coherencia - y en las que sería más adecuado utilizar el concepto y la estructura aditiva de los números naturales relativos, creemos que es el origen de tales errores.

Es nuestra intención obtener evidencias empíricas del comportamiento observable y diferenciado de los sujetos ante dos tipos de tareas representativas de las estructuras en estudio. Dicho comportamiento se puede poner de manifiesto sacando a la luz las interferencias y contradicciones que se producen entre ambos tipos de conceptos y estructuras, cuando el individuo se ve obligado a pensar y tomar decisiones sobre situaciones similares en las que intervienen. A priori, se pueden conjeturar tres tipos de comportamiento cognitivo:

a).- Que el tratamiento y las respuestas sean, en su mayoría, efectivamente diferentes y correctas, lo que llevaría a concluir que la hipótesis VI es cierta, es decir, que el individuo trata de forma diferente las situaciones con números enteros y con números naturales relativos, lo que implicaría que se trata de dos campos conceptuales diferentes.

b).- Una segunda posibilidad se podría caracterizar por la duda, la confusión o la respuesta en blanco, lo que denotaría una inseguridad en los conocimientos sobre ambos campos. En este caso no sería posible asegurar nada sobre la verdad o falsedad de la hipótesis empírica, sino que se constataría la existencia de conflictos cognitivos debidos a múltiples causas.

c).- Por último podemos encontrar tratamientos iguales, en cuyo caso el individuo utilizaría los mismos patrones y esquemas para tareas que teóricamente requieren tratamientos diferenciados. Aquí se daría la predominancia de uno de los dos campos numéricos.

En este último caso, el instrumento de recogida de datos iría encaminado a constatar: **1)** que el conocimiento aprendido sobre los números enteros (el único que aparece explícitamente en los programas y libros de texto) se aplica correctamente en aquellas situaciones conocidas y utilizadas comúnmente en el tratamiento didáctico del tema (temperaturas, cronología, saldos bancarios, etc.), pero de forma inadecuada, mecánica e indiscriminada en situaciones sencillas que se resuelven en el campo numérico natural relativo; **2)** que, en muchos casos, el individuo comete errores por aplicación de su "pensamiento relativo natural" a situaciones que requieren de un "pensamiento entero",

mucho más formalizado y menos intuitivo que el anterior.

Estas breves consideraciones son un adelanto de lo que va a constituir el estudio empírico, que completaremos en lo que sigue con un análisis de las cinco diferencias mencionadas.

8.4.- Un primer análisis de las diferencias estructurales.

Exponemos a continuación un estudio ejemplificado sobre las diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros desde la óptica de sus aplicaciones a situaciones concretas. Para ello utilizaremos problemas y situaciones cotidianas, enunciadas verbalmente, sobre temperaturas, saldos bancarios y saldos de juegos, cronología y ascensores para los números enteros, y sobre ganancias-pérdidas, subidas-bajadas, ingresos-reintegros bancarios y haberes-débitos para los números naturales relativos. Además, para evitar interferencias significativas con otros factores, emplearemos valores numéricos inferiores a 10 y frases y términos en lenguaje común formadas por expresiones cotidianas y familiares.

Los tres tipos de estructuras básicas mencionadas en la introducción intervienen: a través de las características ordinales y algebraicas de los conjuntos numéricos y de sus sistemas de representación (estructuras lógico-formales y de los sistemas simbólicos), a través de los tipos de funciones semánticas y actividades mentales de carácter cognitivo asociadas a cada uno de los campos conceptuales (estructuras cognitivas) y a través de las características de los diferentes contextos de aplicación (estructuras de fenómenos, situaciones y problemas). Por otra parte, los ejemplos que se van a utilizar se han extraído de las tareas incluidas en los dos cuestionarios previos que se mencionan en el capítulo 10. Nos remitimos, por tanto, a los apartados 4 y 5 de dicho capítulo para una información más completa sobre la aplicación empírica de la primera de las cinco diferencias establecidas.

8.4.1.- Primera diferencia : orden total (entero) - orden parcial o doble natural con inversión en la región "negativa" (natural relativo).

Tanto en las situaciones que se modelizan mediante la estructura ordinal (Z, \leq) (Ejemplo: temperaturas, cronología ordinaria y otras), como en aquellas situaciones que se modelizan mediante el grupo aditivo y ordenado ($Z, +, \leq$) (Ejemplo: saldos bancarios, golf y otras), la estructura entera se caracteriza por un orden total sin primer ni último elementos. Así sabemos que una temperatura de 3 grados sobre cero (+ 3 grados) es mayor que otra de 2 grados bajo cero (- 2 grados), o que un saldo bancario positivo de 3 (+ 3) es mayor que un saldo negativo de 2 (- 2). Por el contrario esto no ocurre en la estructura natural relativa que, si bien se comporta igual que la entera para la comparación y el orden de valores numéricos "positivos", presenta diferencias en el orden de valores numéricos "negativos" y, sobre todo, en el orden entre valores de diferente signo, que no existe en virtud del orden parcial definido.

Un análisis detallado de las características de ambos tipos de orden conduce a considerar los cuatro aspectos puntuales que se abordan en los apartados que siguen y que constituyen manifestaciones de la diferencia que estamos analizando.

a.1).- Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones.

Los términos, signos y significados que se utilizan para adjetivar o calificar a las medidas cuyos valores numéricos pertenecen a las “regiones duales” de ambas estructuras ordinales, difieren en función de la posibilidad de comparar entre sí los pares de elementos de signo contrario y de la existencia de “conexión” entre dichas regiones duales. Esta asignación es:

- justa y determinada para números enteros (positivos y negativos usuales o términos “mayores que cero” y “menores que cero”, si bien, en algunos casos, se utilizan los números naturales en lugar de los enteros positivos), de manera que cada región tiene una valoración fija indudable relacionada con su posición usual en el esquema lineal de la recta numérica.

- arbitraria e indeterminada para números naturales relativos. En unos casos la costumbre determina el “signo” de cada región: “ganar” se suele considerar “bueno”, “mejor”, o incluso “positivo”, y perder, “malo”, “peor” o “negativo”, aunque, en este último caso, las palabras positivo-negativo tienen significados asimilables a los de “favorable-desfavorable” a diferencia de sus significados matemáticos. En otros casos la adjetivación es claramente arbitraria y depende de la situación (subir puede ser positivo o negativo, según las circunstancias). En general podemos decir que en los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relativos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, no existe en ningún caso una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a las regiones.

Estas diferencias se pueden manifestar en cuestiones como las siguientes:

Completa las siguientes frases para que tengan sentido :

- *Las temperaturas sobre cero son y las temperaturas bajo cero son*
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de
.....
- *Subir escalones es y bajar escalones es*
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de
.....

en las que tendremos en cuenta para el estudio empírico que los adjetivos que se pueden emplear (ejemplos: maravilloso, canallesco, estupendo, nefasto, etc.) son muchos más de los que realmente nos interesan, que son aquéllos que aparecen en los problemas

aritméticos de enunciado verbal y que se refieren específicamente al orden y la comparación.

a.2).- Comparación-valoración global de regiones.

La diferencia en el orden se manifiesta, también, al realizar una comparación entre las dos regiones opuestas. A diferencia del apartado anterior, en el que los términos lingüísticos eran adjetivos, nos encontramos aquí con comparativos gramaticales, cuya utilización también es diferente para ambos tipos de números. Así, una comparación global de regiones es:

- justa y determinada para medidas enteras (los positivos son “mayores” que los negativos);

- arbitraria e indeterminada para medidas naturales relativas (ganar suele ser “mejor” que perder, si bien esto no tiene porque ser así; subir no es ni mejor ni peor que bajar en todos los casos¹, etc.). En rigor, y al margen de los condicionamientos que aparecen en las situaciones cotidianas, las dos regiones naturales relativas no son, en ningún caso, comparables entre sí.

Estas diferencias se pueden manifestar en cuestiones como las siguientes:

- *Di si son o no comparables los siguientes pares de términos. En caso afirmativo, construye una frase que exprese dicha comparación.*
Una planta por encima de la planta baja - una planta por debajo: ... (si/no)
.....
Regalar - que te regalen: ... (si/no)
.....

- *Se trata aquí de comparar cosas. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una x en la casilla correspondiente añadiendo si quieres lo que creas conveniente):*
1.- Faltar es. que sobrar.
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de
.....
2.- Una temperatura negativa es. que una positiva.
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de

¹Nótese aquí, que muchos errores que se cometen en la resolución de problemas en los que intervienen números naturales relativos pueden ser debidos a las diferentes valoraciones socioculturales e individuales (subjetivas a veces) que de hecho tienen la mayor parte de las variables relativas. Toda valoración-comparación de pares de medidas naturales relativas opuestas, además de ser ajena a la propia estructura relativa, es conflictiva en virtud del carácter indeterminado, subjetivo o circunstancial de las mismas.

.....

a.3).- comparación de medidas con valores numéricos “negativos” (inversión en el orden entre enteros y naturales relativos).

Como se ha puesto de manifiesto en el apartado a.1, toda asignación o atribución que se haga a las regiones en la estructura natural relativa es arbitraria. Por este motivo, y dado que se suelen utilizar calificativos similares a los que se emplean objetivamente para los números enteros, vamos a elegir como “región negativa” para los números naturales relativos a aquélla que es considerada usual y mayoritariamente como tal en los contextos más representativos. Una vez elegida dicha región, el orden entre los elementos de ambos subconjuntos es:

- el orden usual entre números enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto).
- el orden inverso al entero entre los números naturales relativos considerados como “negativos” (orden natural).

Esta diferencia, se puede manifestar en cuestiones como las siguientes:

Se trata de hacer comparaciones. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una x en la casilla correspondiente añadiendo lo que creas conveniente):

Una pérdida de 3 en una jugada es que una pérdida de 1
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de
.....

Un saldo deudor de 3 es que un saldo deudor de 1
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de
.....

Los términos que pueden dar sentido a las frases anteriores son de diversos tipos, incluyéndose en el capítulo 10 el análisis y la delimitación precisa de sus diferentes categorías.

a.4).- comparación (orden) de medidas con valores numéricos de diferente signo o región.

Este último criterio, que resulta una variante del a.2 por inclusión de valores numéricos sencillos, se centra en torno a la comparación de medidas con valores numéricos de signos o regiones diferentes. Además de las consideraciones realizadas se produce aquí una:

- Conexión y homogeneidad entre regiones para números enteros, lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones (Ejemplo: un saldo de 2 pesetas a favor del cliente (saldo positivo o acreedor) siempre será un saldo

“mayor” o “superior” a un saldo de 3 pesetas a favor del banco (saldo negativo o deudor)).

- Desconexión entre regiones para números naturales relativos, lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a las comparaciones. En estos casos, la utilización de palabras precisas propias de la estructura entera, vacían de sentido lógico a las comparaciones (Ejemplo: una pérdida de 3 pesetas es “menor” (?) que una ganancia de 2 pesetas). A lo sumo se pueden utilizar algunos términos subjetivos y vagos que, en sí mismos, expresan la dependencia de las circunstancias, del lenguaje ordinario o del contexto sociocultural (Ejemplo: Una subida de 3 escalones se puede decir que es “peor” que una bajada de 1 escalón por el esfuerzo que es necesario realizar. Sin embargo, teniendo en cuenta que es bueno hacer ejercicio, también se puede decir que es “mejor” porque beneficia el estado físico del sujeto). Las diferencias se pueden observar en cuestiones como las siguientes:

Se trata de hacer comparaciones. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una x en la casilla correspondiente añadiendo a continuación si quieres, lo que creas conveniente):

- 3 grados es que + 1 grado
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de

.....

una ganancia de 3 es que una pérdida de 1
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de

.....

una subida de 3 escalones es que una bajada de 1 escalón
no lo se ~ no es posible completar la frase ~ depende ~ de

.....

Las cuatro diferencias tratadas en este apartado, van a constituir la base del estudio empírico que se desarrolla en la parte IV y que amplía las consideraciones expuestas hasta ahora.

8.4.2.- Segunda diferencia: Sin primer elemento (entero) - con primer elemento (relativo).

La existencia de primer elemento, como así ocurre en el caso de los números naturales relativos, impone limitaciones que afectan a la naturaleza de los números, al campo de aplicación, a la simbolización y a la posibilidad de realización de transformaciones; manifestaciones distintas de la segunda diferencia y que pasamos a analizar a continuación.

b.1) .- Naturaleza de los números y de las situaciones.

En la aplicación concreta de la estructura natural relativa, los números representan medidas de cantidades discretas de dos modalidades opuestas (llamadas “cantidades dirigidas o adjetivadas”). Estas “cantidades dirigidas” suelen representar transformaciones cuantitativas discretas, mientras que el signo, la partícula dual o la palabra que acompaña al número natural representa la pertenencia a uno de entre dos conjuntos complementarios en que se divide el universo de valores, en cada uno de los cuales no son posibles los valores inferiores a cero.

Los números enteros representan, o posiciones en una serie única con respecto a un elemento central (cero entero) que sirve de referencia, o bien, “distancias” a dicha referencia central. El signo se refiere a la situación “por debajo” o “por encima” de dicha referencia. Aquí, en contraposición a la estructura natural relativa, sí son posibles los valores “inferiores a cero”, en el bien entendido que el cero significa posición central y no medida en sentido absoluto.

Las diferencias en este punto, se pueden considerar en varios apartados:

b.1.1 - Significados usuales asociados a los tipos de número según el contexto.

Las siguientes cuestiones, hacen alusión a diferentes significados de los números.

- En cada uno de los siguientes casos, señala el **tipo de número** que se debe utilizar para que la frase sea correcta y tenga sentido:

<u>En una frase en la que se habla de:</u>	<u>sin signo (natural)</u>	<u>con signo</u>
<u>número:</u>		
<u>(entero)</u>		
- “Una temperatura de . . .”	~	~
- “Una ganancia de . . .”	~	~
- “Un saldo bancario de . . .”	~	~
- “Una bajada de temperatura de . . .”		~
~		

Subraya las opciones que consideres ciertas.

- 5 puede representar:	un ingreso negativo	una variación de temperatura
	una subida negativa	un saldo deudor
	una ganancia negativa	una temperatura negativa

<i>+ 5 puede representar:</i>	<i>un ingreso positivo</i>	<i>una variación de temperatura</i>
	<i>una subida positiva</i>	<i>un saldo acreedor</i>
	<i>una ganancia positiva</i>	<i>una temperatura positiva</i>
<i>5 puede representar:</i>	<i>un ingreso</i>	<i>una variación de temperatura</i>
	<i>una subida</i>	<i>un saldo</i>
	<i>una ganancia</i>	<i>una temperatura</i>

b.1.2.- Posibilidad de valores inferiores y superiores a cero.

Se juega con el doble significado para el término “cero”: como cantidad natural y como posición o referencia central. En el primer caso, se trata de primer elemento y en el segundo no. El siguiente ejemplo muestra una de las posibilidades de manifestación de esta diferencia.

<i>Decir si es o no posible que ocurran las siguientes cosas (poner una cruz bajo la opción u opciones elegidas):</i>			
	<u><i>si</i></u>	<u><i>no</i></u>	<u><i>no se</i></u>
<u><i>depende</i></u>			
<i>- Una subida de temperatura menor que cero</i>			
<i>- Una pérdida económica mayor que cero</i>			
<i>- Un ingreso mayor que cero</i>			
<i>- Una temperatura menor que cero</i>			
<i>- Una deuda menor que cero</i>			
<i>- Un saldo mayor que cero</i>			

b.1.3.- Existencia de límites inferiores.

Aquí se trata de poner de manifiesto la diferencia entre tener o no primer elemento de una forma más explícita. En el siguiente ejemplo se pide directamente dicho valor.

<i>¿Cuál es en teoría el menor valor posible? (si no existe, no se conoce o no lo sabes, ponlo a continuación):</i>	
<i>- de un saldo bancario</i>	
<i>- de un aumento de temperatura</i>	
<i>- en un ascensor, de una planta que está por debajo de la planta baja</i>	

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> - de una temperatura - de una pérdida en un juego de canicas - de una fecha dada en años (calendario) - de un reintegro en el banco (sacar dinero) |
|---|

b.2).- Representación.

En la estructura entera se utilizan números con signo que a veces se sustituyen por términos netamente relativos sin afectar para nada a la naturaleza de los números; por ejemplo: indistintamente se habla de una temperatura de “- 5 grados” o de "5 grados bajo cero", o también del año “+ 320” o del año "320 después de Cristo", o simplemente del año 320. En cualquier caso estamos ante una estructura ordinal sin primer elemento, cuya ausencia implica la unicidad de la serie y del orden, lo que permite, entre otras cosas, utilizar una terminología común y efectuar transformaciones a lo largo de la serie. En este caso, la representación adoptada para los números enteros tiene una estrecha relación con la de los números naturales relativos, a pesar de lo cual presentan diferencias notables.

En la estructura natural relativa existen dos series duales con primer elemento, lo que supone que la terminología a emplear debe señalar claramente la diferencia entre ambas². La terminología usual es la numérica adjetivada con números naturales (ganar 6, subir 2, etc.), aunque, al igual que ocurre en la estructura entera, se utilizan en algunos casos los números enteros para representar números naturales relativos con la consiguiente confusión; por ejemplo: en el contexto clásico de las cargas positivas y negativas (Cotter, S.; op. citada en el cap. 4) es normal sustituir "5 cargas negativas" por "una carga de - 5", empleando a continuación las reglas y propiedades de los números enteros. En estos casos, el problema radica en que se provoca un cambio de variable y de estructura (de una adjetivación dual se pasa a una valoración global, un saldo total o un estado en torno a un cero único), es decir, se transforma una variable natural relativa en entera.

En resumen, las principales diferencias en cuanto a la representación son las siguientes:

b.2.1.- Tipos de representación simbólica (variedad y naturaleza de las representaciones).

En la estructura entera se utilizan tres representaciones (adjetivada, con signo y natural). Las dos primeras de forma indistinta, mientras que la tercera está muy extendida en situaciones cotidianas (las temperaturas positivas o los pisos por encima de cero en un ascensor, entre otras). Por el contrario, en la estructura natural relativa se utiliza la

²El signo o el adjetivo de los números naturales relativos, indica la pertenencia a una serie determinada de entre dos posibles. Los números naturales relativos con diferente signo o adjetivo, son números que pertenecen a conjuntos distintos, a diferencia de los números enteros, en donde el signo representa una posición en la serie única. Esta diferencia entre posición y pertenencia, es una característica esencial de la naturaleza de ambos objetos.

representación mixta o adjetivada y la representación con signo bajo ciertas condiciones; una mezcla de representaciones que puede llevar a la confusión y al error cuando se enfrentan entre sí ambas estructuras.

La representación aislada mediante un número con signo, no es suficiente para los números naturales relativos, puesto que debe ir acompañada, explícita o implícitamente, de alguna información sobre el tipo de dualidad a la que se refieren y sobre el significado de los signos (que como hemos visto, es arbitrario). Por otra parte no es correcta, inviable en algunos casos o no tiene sentido la utilización de los números naturales, a menos que se haga expresamente la identificación de los “positivos” con los naturales, al igual que ocurre con los enteros.

Las siguientes cuestiones pueden reflejar estas diferencias. En el subapartado siguiente se completan estas consideraciones en lo que se refiere a la simbolización matemática.

- Escribir dentro del paréntesis si es posible, un símbolo numérico que represente de forma adecuada cada uno de los siguientes hechos (si no es posible, ponlo a continuación):
- Un saldo bancario deudor de cinco ()
 - Subir cinco escalones ()
 - Una bajada de temperatura de tres grados ()
 - Quitar 3 cartas del montón ()

- Escribe en cada hueco un **símbolo numérico** sencillo que complete las siguientes frases:
- Entre ayer y hoy ha habido una variación de temperatura de grados.
 - El ascensor ha bajado a la planta
 - El globo ascendió metros en la última media hora.
 - Hasta ahora el saldo total del juego para mi es de

- Escribir una frase con sentido que incluya cada uno de los siguientes símbolos y que se refiera en cada caso al tema escrito entre paréntesis):
- + 5 (con dinero)
.....
 - 3 (con temperaturas)

.....
- 3 (con desplazamientos)
.....

b.2.2.- Simbolización matemática.

Los números enteros se representan usualmente mediante números con signo, si bien, a veces se prescinde del signo “+” debido a la *identificación de los enteros positivos con los números naturales*. Por el contrario, los números naturales relativos carecen de simbolización matemática y las medidas naturales relativas se suelen representar mediante expresiones mixtas compuestas por números naturales y adjetivos, partículas duales o verbos de acción. En concreto, la simbolización matemática es:

- Conocida y determinada para los números enteros: 2, + 2, - 4, etc.
- Inexistente para los números naturales relativos.

Hay aquí un posible motivo de confusiones, ya que se suele acudir a la simbolización entera o natural ante la necesidad de simbolizar un número natural relativo. La siguiente tarea pretende poner de manifiesto el problema inverso, es decir, la dificultad de interpretar expresiones matemáticas con números enteros cuando intervienen variables naturales relativas.

Dos personas han estado hablando en una mesa y se han marchado dejando un papel con la siguiente nota: $- 2 + 4 - (- 1)$. ¿De que pueden haber estado hablando?.

Inventa dos historias diferentes.

- 1.- con ganar y perder en un juego*
- 2.- con ingresos y reintegros bancarios*

b.2.3.- Intercambio de símbolos.

Los signos son necesarios en la mayoría de las aplicaciones prácticas de los números enteros: una temperatura de + 5 grados; un saldo bancario de - 3; etc.; aunque a veces tiene sentido utilizar como alternativa la adjetivación dual (5 grados sobre cero o un saldo de 3 pesetas a favor del banco). Por el contrario, para los números naturales relativos es difícil encontrar expresiones alternativas sin modificar el sentido de la frase original. Estas diferencias se pueden reflejar en respuestas a cuestiones como las siguientes:

Escribir en los casos en que sea posible, otras frases cortas que signifiquen lo mismo.

- Subir 3 pisos forma ~ ;	No es posible expresarlo de otra forma
- El año 1993 forma ~ ;	No es posible expresarlo de otra forma
- Un saldo bancario de + 6 ;	No es posible expresarlo de otra forma ~
- Perder 5 canicas ~	No es posible expresarlo de otra forma

b.2.4.- Compatibilidad entre adjetivación y signo.

En un sentido estricto, se puede decir que en ambas estructuras existe una incompatibilidad entre la adjetivación dual y los signos usuales. Sin embargo, hay ciertos matices que introducen diferencias en cuanto a la utilización conjunta de dichos símbolos. En concreto:

- Existe incompatibilidad manifiesta entre adjetivación y signo en la estructura natural relativa, tanto si son del mismo sentido (“Juan ha ganado + 3 canicas” o “he bajado -4 escalones”), como si son de sentidos opuestos (“subir - 5 escalones” o “efectuar un reintegro de + 3”), siendo aquí más clara la incoherencia que en el caso anterior.

- En la estructura entera, puede existir redundancia en unos casos (términos del mismo signo: “la temperatura de hoy ha sido de +5 grados sobre cero”), e incompatibilidad e incoherencia en otros (términos de distinto signo: “la temperatura ha sido de + 5 grados bajo cero”).

La siguiente tarea, incluye ejemplos en los que se manifiesta esta diferencia.

<i>Tachar lo que esté mal en cada una de las siguientes expresiones:</i>	
- Una temperatura de + 5 grados sobre cero	- Subir + 5 escalones
- Un ingreso de - 5 en la cuenta bancaria	- Un reintegro de - 5
- Una temperatura de - 5 grados sobre cero	- Un saldo deudor de + 5
- Bajar - 5 pisos	- Subir - 5 pisos
- Una temperatura de - 5 grados bajo cero	- Un saldo a favor de + 5

b.3).- Transformaciones.

Las transformaciones cuantitativas y métricas ordinarias son duales; pueden ser

“positivas” (aumentar, agregar, etc.) o “negativas” (disminuir, perder, etc.). La ausencia de primer elemento y la unicidad de la serie permiten, en el caso de la estructura entera, realizar todo tipo de transformaciones discretas en cualquier sentido y de cualquier valor absoluto. Por el contrario, en la estructura natural relativa las transformaciones se encuentran *limitadas inferiormente*. En las siguientes cuestiones se ponen de manifiesto estas diferencias.

- *Un ciclista está el 3º en la clasificación, ¿cuántos puestos puede subir?. ¿Y bajar?.*
- *Si la temperatura es de 3 grados bajo cero, ¿Cuánto puede subir?, ¿y bajar?.*
- *Si tengo 3, ¿puedo gastar más de esa cantidad?, ¿y menos?. ¿Cuál es la menor cantidad que puedo gastar?. ¿En qué casos puedo gastar más de lo que tengo?.*

- *Una bajada de temperatura de menos de 0 grados sería : una subida positiva, una bajada negativa, una subida negativa, una bajada positiva o sería imposible?.*
- *Un ingreso menor que cero sería : un reintegro negativo, un ingreso negativo, un reintegro positivo o sería imposible?.*

8.4.3.- Tercera diferencia: "Continuidad" de medidas - "Discontinuidad" de medidas (al cruzar el cero).

Una de las características de la estructura entera es la de poder “pasar” de la zona de valores numéricos negativos a la de valores numéricos positivos y viceversa, es decir, “poder cruzar a través del cero”, lo que hemos denominado "continuidad" de medidas o ausencia de “rupturas” desde un punto de vista intuitivo. En este sentido es perfectamente normal decir que entre un saldo de - 15.000 ptas. y un saldo de + 5.000 ptas. hay una diferencia de 20.000 ptas. Sin embargo, en la estructura natural relativa, debido a la inversión del orden, al orden doble y al doble cero, no es posible efectuar medidas entre valores opuestos ("bajar 6 pisos es bajar o subir 3 pisos más o 3 pisos menos que subir 3 pisos?"), lo que, por el contrario, sí es posible entre valores del mismo signo ("entre perder 3 y perder 4, hay una diferencia de 1").

Las siguientes cuestiones pueden poner de manifiesto estas diferencias.

- *¿Es necesario “pasar por cero” en los siguientes cambios?.*
La temperatura ha pasado de - 3 grados a + 2 grados.
Juan ha pasado de ir ganando 2 en la primera jugada a ir perdiendo 3 en la

segunda.

Juan ha perdido 3 en la primera jugada y ha ganado 2 en la segunda.

- ¿Qué diferencia hay entre subir 3 pisos y bajar 4 pisos?: una diferencia de 7 pisos; una diferencia de 1 piso; no hay diferencia; son acciones contrarias e independientes y, por tanto, no tiene sentido hablar de diferencia entre ellas.

- ¿Cómo será una temperatura de 3 grados bajo cero con respecto a una temperatura de 2 grados sobre cero?.

Si "Ganar 3" es ganar uno más que "ganar 2" y "perder 3" es perder uno (más/menos) que "perder 2". ¿Cómo será "ganar 3" con respecto a "perder 2"?: "ganar 5 más"; "ganar 1 más"; "perder 1 menos"; no son comparables.

- Juan tiene un saldo de +3 y Pedro tiene un saldo de -2. Explica la diferencia.

- Juan gana 3 y Pedro pierde 5 en una jugada. Explica la diferencia.

8.4.4.- Cuarta diferencia: Cero único - Cero doble (natural relativo).

Se trata de una diferencia importante y lógicamente compleja. La complejidad se manifiesta en el lenguaje y en la dificultad de una manipulación coherente de las situaciones. Algunas de las cuestiones que evidencian esta diferencia, son las siguientes:

- Si hablamos de no ganar (ganar 0) y no perder (perder 0), ¿podemos hablar de una temperatura positiva 0 (0 grados sobre cero) o negativa 0 (0 grados bajo cero)?.

- ¿Qué diferencia hay entre: "no subir" y "no bajar"; "no ganar" y "no perder"; un ingreso de 0 y un reintegro de 0?; un saldo positivo de 0 y un saldo negativo de 0?; "no ganar" y "ganar 0"; "no ganar" y "perder 0"; "no perder" y "perder 0".

- Simboliza cada término y explica cómo se puede pasar: de no tener nada a no deber nada; de no deber nada a no tener nada; de no deber nada a tener algo; de no tener nada a deber algo; de que no te deban nada a no deber nada.

- Si tener un saldo de +2 en una cuenta y un saldo de -3 en otra, se puede resumir en un saldo de -1, ¿en qué se puede resumir: un saldo de +2 y otro de -2?.

Si perder 3 primero y ganar 4 después se puede resumir en ganar 1 entre las dos

*partidas, ¿en qué se pueden resumir los resultados siguientes?:
perder 3 y ganar 3; ganar 4 y perder 4; no ganar y no perder; ganar 0 y perder 0.*

8.4.5.- Quinta diferencia: Composición aditiva: Adición entera - Adición natural y anulación-compensación.

Como se deduce del ejemplo presentado en el apartado 7.4 del capítulo 7, la composición aditiva o “suma” de números naturales relativos presenta diferencias con respecto a la suma de números enteros. Estas diferencias, que se deducen de la naturaleza de las definiciones correspondientes (simple y homogénea para números enteros y compuesta y heterogénea para números naturales relativos) y que están relacionadas con el tipo de estructura ordinal, se basan en la intervención, por un lado, de la suma de números naturales, y por otro, de la noción de opuestos aditivos que conduce a lo que hemos denominado como “anulación-compensación”.

La noción de opuestos aditivos tiene más sentido en la estructura natural relativa que en la entera, ya que se encuentra relacionada con el funcionamiento de la anulación-compensación y con la composición de transformaciones que conduce a la transformación identidad. Sin embargo, se utiliza en la estructura entera como idea básica para la construcción del grupo aditivo, en el que un número positivo y uno negativo con el mismo valor absoluto se anulan.

Los siguientes ejemplos ilustran las diferencias mencionadas.

- En una jugada, Juan ha pasado de ir perdiendo 3 a ir ganando 2. ¿Qué ha pasado en esa jugada?. Simboliza aritméticamente y explica el significado de cada símbolo numérico que utilices.

- En una jugada, Juan ha perdido 3 y en la siguiente jugada ha ganado 2. ¿Qué ha pasado entre las dos jugadas?. Simboliza con números y operaciones y explica el significado de cada uno de ellos.

- Completa y representa mediante símbolos aritméticos:

Hacia 6 grados bajo cero y la temperatura ha subido 5 grados, luego hace

Debo 3 y pago 1, luego

Debo 3 y pago 3, entonces

Tengo 5 y gasto 7, luego

Hacia 6 grados sobre cero y ha bajado 8 grados, entonces

En una cuenta tengo un saldo de - 5 y en otra un saldo de + 2. Entre las dos tengo en total un saldo de

8.5.- Conclusiones.

1).- El número natural relativo presenta unas características estructurales propias y diferenciadas de las que definen al número entero, que se ponen de manifiesto a través de representaciones semánticas y sintácticas "naturales" e intuitivas y de amplia utilización cotidiana; si estos conceptos numéricos no reciben un trato curricular adecuado se puede dificultar la comprensión y el dominio de un concepto más abstracto como es el de número entero, afectando, como es lógico, a la enseñanza y el aprendizaje de todo el conocimiento matemático que utilice dichos conceptos y propiedades o que esté fundamentado en él.

2).- Las cinco diferencias lógico-formales estudiadas inciden en la *estructura fenomenológica* de ambos campos conceptuales. Como se ha puesto de manifiesto por medio de las cuestiones, problemas y situaciones concretas que han servido de ejemplos, las diferencias lógico-formales se traducen, igualmente, en diferencias fenomenológicas:

- los números naturales relativos organizan, dan respuesta, adquieren significado concreto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas en los que interviene la comparación o la transformación aditiva tanto natural como entera, o en las que existe una estructura dual de medidas discretas formada por dos series independientes y opuestas una de la otra.

- los números enteros organizan, dan respuesta, adquieren significado concreto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas de escalas sin principio ni fin con una referencia central o en las que se efectúa un cambio de referencia u origen en series de valores discretos representables inicialmente mediante números naturales (fenomenología concreta), o bien, en situaciones y problemas susceptibles de una manipulación algebraica o relacionados con actividades matemáticas derivadas (fenomenología matemática).

3).- La estructura de los fenómenos se encuentra también relacionada con la estructura de actividades cognitivas correspondiente. Uno de los elementos fundamentales dentro de esta estructura cognitiva es el concepto de esquema (Vergnaud, G., 1993, págs. 88 y sgtes.), entendido como "*organización invariante de la conducta por una clase de situaciones dadas*" (op. citada, pág. 89) y compuesto por "*reglas de acciones para alcanzar cierto fin, invariantes operatorios e inferencias para hacer actuar el esquema en cada situación particular ..*" (pág. 93).

En nuestro caso intervienen, entre otros, los siguientes esquemas: comparación, transformación y combinación de medidas y de números; intercambio de símbolos; medida entre elementos opuestos en un contexto entero; anulación-compensación.

4).- La primera diferencia ordinal se manifiesta en cuatro tipos de tareas-esquemas diferentes: atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones; comparación-valoración global de regiones; comparación de medidas con valores numéricos "negativos"; comparación de medidas con valores numéricos de diferente signo o región.

Las principales características diferenciadoras son las siguientes:

- en los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relativos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, no existe, en ningún caso, una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a las dos regiones opuestas.

- toda comparación global de regiones es justa y determinada para números enteros y arbitraria o indeterminada para números naturales relativos.

- el orden entre los elementos de la “región negativa” es el usual entre números enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto) y el inverso al entero entre los números naturales relativos considerados como “negativos” (orden natural).

- existe conexión y homogeneidad entre regiones para los números enteros, lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones, y desconexión entre regiones para números naturales relativos, lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a dichas comparaciones.

5).- Existe similitud entre ambas estructuras numéricas en la tarea-esquema de comparación de medidas dentro de la región “positiva”. En términos más precisos habría que decir que de las dos regiones opuestas que componen la estructura natural relativa, una de las dos (cualquiera de ellas) posee la misma estructura ordinal que la que tienen los números enteros positivos, mientras que la región opuesta presenta el orden inverso al que poseen los números enteros negativos. La arbitrariedad que supone asignar a una de las dos regiones naturales relativas el término “positiva” o “negativa” admite una solución convencional basada en usos lingüísticos o en la costumbre. En sentido estricto, sólo se deben contemplar elementos o regiones opuestas una de la otra, sin hacer intervenir calificativos o términos duales para dichos elementos o regiones.

6).- La segunda diferencia, que se refiere a la existencia de primer elemento, se pone de manifiesto en los significados concretos y en la naturaleza de los elementos, en la representación simbólica y en las transformaciones permitidas en cada una de las estructuras.

7).- La tercera diferencia, que se refiere a las consecuencias métricas que se deducen de la “conexión-desconexión” entre regiones, está relacionada con la posibilidad de comparación de valores de diferente signo. Si se toma como referencia la estructura entera, la “ruptura” existente entre los números naturales relativos de un signo y sus opuestos no permite efectuar medidas entre dichos números, lo que hemos puesto de manifiesto mediante ejemplos diferentes que deberán ser tratados más detenidamente en investigaciones posteriores.

8).- La diferencia existente entre poseer un único cero (estructura entera), que es además elemento neutro, y poseer dos ceros, que no son permutables bajo la ley aditiva (estructura natural relativa), presenta una complejidad lógica que no hemos abordado

suficientemente en el trabajo y que deberá ser objeto de una atención especial en el futuro. No obstante, se ponen en evidencia las diferencias de tipo lógico existentes en este punto entre ambas estructuras.

9).- Se constatan y se analizan dos tipos de leyes de composición interna: suma de números enteros y suma de números naturales relativos, formada esta, a su vez, por la combinación de la suma de números naturales y la operación denominada “anulación-compensación”.

8.6.- Logros y hallazgos.

En este capítulo se han alcanzado logros que avalan la bondad de la *hipótesis* III enunciada en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dicha hipótesis es la siguiente:

III.- El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la “región negativa”; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones “positiva” y “negativa”; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

La identificación y el análisis ejemplificado de las cinco diferencias, junto a argumentos que se sustentan en las características de las estructuras algebraicas y ordinales de los dos conjuntos numéricos, presentadas en el capítulo 7, avalan la credibilidad de esta hipótesis que consideramos corroborada en su totalidad y a plena satisfacción en este capítulo.

De los *objetivos* enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, y como consecuencia de la comprobación de la hipótesis mencionada, se han cubierto en este capítulo, en diferente grado, los siguientes:

b).- Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio; objetivo cubierto parcialmente al detectarse que una parte de situaciones y problemas del dominio presenta características que no son compatibles con dichos conceptos numéricos usuales.

c).- Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números; objetivo cubierto parcialmente en el capítulo anterior, en el que quedó establecida su necesidad lógica, y reforzado en este capítulo al ponerse de manifiesto las cinco diferencias detectadas. La constatación de dichas diferencias, la nueva organización del campo que se presenta en el capítulo 9 y la constatación empírica de diferencias en el tratamiento cognitivo (capítulo 11), son argumentos añadidos en favor de la consecución de este objetivo.

d).- Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes

entre los tres tipos de números; objetivo cubierto plenamente en este capítulo, a cuya consecución se ha dedicado la totalidad del mismo.