Capítulo 7

Medidas y números naturales relativos.

7.1.- Introducción.

El análisis didáctico que hemos realizado afecta, según se desprende de los antecedentes y de las consideraciones generales que se han expuesto en el capítulo 6, a facetas diferentes del tema objeto de estudio. La extensión de cada una de ellas es de tal magnitud que su desarrollo conjunto correspondería a un programa de investigación a largo plazo que excede los propósitos de nuestro trabajo. Por tal motivo, como se explica en el apartado 1.6 y se deduce de las conclusiones establecidas en el capítulo 6, consideramos necesario atender, de manera prioritaria, a la clarificación de los conceptos y relaciones que intervienen, mediante un estudio de carácter lógico-formal y fenomenológico sobre los conceptos cuantitativos, numéricos y métricos involucrados en el dominio considerado.

En este capítulo y en el siguiente se exponen con detalle los resultados obtenidos y se justifican las diferencias encontradas entre las distintas clases de números y medidas. La parte fundamental se dedica, en primer lugar, a la identificación y definición de las medidas y los números naturales relativos, con los que se construye, en segundo lugar, un modelo que integra dichos conceptos junto al resto de los elementos del dominio. Como consecuencia del estudio citado se obtienen conclusiones importantes para la organización del campo conceptual aditivo y para la delimitación del marco general de referencia en el que situar y justificar el contenido de los capítulos restantes, el estudio en su conjunto y la continuación en investigaciones posteriores. El análisis de las diferencias estructurales, que se desarrolla en el capítulo 8, y una clasificación completa de los problemas y situaciones de la parte del campo aditivo que estamos considerando, que se expone en el capítulo 9, completan el estudio teórico.

7.2.- Conceptos usuales de magnitud, cantidad y medida.

En este apartado vamos a exponer una revisión de los conceptos, teniendo en cuenta los antecedentes establecidos en los apartados 3.6 y 4.4. Básicamente, pretendemos completar dicha información clarificando los planteamientos existentes en Matemáticas y en Ciencias Experimentales, y adoptar una posición teórica adecuada al problema planteado. Para ello vamos a caracterizar brevemente los conceptos desde cada uno de los enfoques, analizar sus semejanzas y diferencias, explicitar el punto de partida desde el que vamos a precisar, con nuevos argumentos, la diferenciación epistemológica entre ellos y sentar las bases para identificar los diferentes tipos de magnitudes, cantidades, números y medidas que intervienen.

7.2.1.- Los conceptos de magnitud y los diferentes tipos de magnitudes.

El concepto de magnitud se define en sentido amplio como *"cualquier característica de los cuerpos capaz de ser medida"* (Enciclopedia Larousse, tomo 6, págs.843-844) o de forma más restringida como *"conjunto de entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma"* (Arregui, J., 1970, pág. 25), lo que conduce a la conocida y más simple definición de magnitud en Matemáticas como un *"semigrupo aditivo conmutativo y ordenado"* (op. citada, pág. 26) o, de forma más completa, como un conjunto de entes llamados *"cantidades de magnitud"*, con una estructura de *"semigrupo conmutativo con elemento neutro, absoluto y totalmente ordenado"* (Chamorro, C., Belmonte, J. M., 1988, pág. 135), si bien, la existencia de elemento neutro, *"no es imprescindible para la construcción matemática de magnitud"* (op. citada, pág. 133)[1].

Por otra parte, si el semigrupo que constituye la magnitud llega a ser grupo estamos ante una *"magnitud relativa"* [2], mientras que en caso contrario, se dice que estamos ante una *"magnitud absoluta"* (De Prada, M. D. y otros, 1979, pág. 15). Por otra parte esta definición queda nuevamente restringida en Matemáticas al caso de las magnitudes escalares, añadiendo a las anteriores la condición de ser arquimediana (Fernández, J., 1970, pág. 72). En definitiva una **magnitud escalar absoluta** *"responde a un semimódulo monógeno arquimediano, con un orden compatible con su ley de composición, sobre un semianillo formado por números reales"* (Chamorro, C.; Belmonte, J. M., 1988, pág. 143). Si el subconjunto de números reales coincide con el conjunto de números naturales o números enteros estamos ante una **magnitud discreta**; si el subconjunto coincide con el de números reales positivos estamos ante una **magnitud contínua**.

Este tipo de magnitudes que, junto a las vectoriales, constituyen la parte fundamental y más elemental del concepto de magnitud en Matemáticas, se define en términos más amplios en el contexto de las Ciencias Experimentales como *"aquéllas que están completamente caracterizadas por un sólo valor numérico que las relaciona con una unidad de medida"* (Enciclopedia Larousse, tomo 6, pág. 843). Por tanto, el concepto de magnitud en

[1] Tendremos en cuenta esta circunstancia que permite la definición de un tipo especial de magnitud que llamaremos "magnitud natural relativa".

[2] En un apartado posterior de este capítulo, cambiaremos esta denominación por la de "magnitud entera".

Matemáticas es más restringido que en Ciencias Experimentales, donde se consideran también las magnitudes "intensivas" o no aditivas. En consecuencia, adoptaremos la definición más amplia de magnitud para abarcar toda la riqueza del campo de investigación e incluir las consideraciones que nos interesan desde el enfoque didáctico. Así, tendremos en cuenta las magnitudes escalares discretas (tanto absolutas como relativas), que cumplen los requisitos formales de la definición matemática, junto a las magnitudes discretas usuales en Ciencias Experimentales que no cumplen alguna de las condiciones que se establecen en dicha definición (temperaturas, cronología, etc.). Igualmente, además de las consideraciones formales, tendremos en cuenta los aspectos empíricos inherentes a los procesos de metrización y a la práctica de la medida.

En otro orden de cosas se aprecia, desde el punto de vista de la Matemática, una notable influencia de la construcción formal de los conjuntos numéricos en la definición del concepto de magnitud, quedando, por este motivo, restringida a aquéllas cualidades cuyos estados se pueden poner en correspondencia con dichos conjuntos numéricos o con una parte de ellos. Este condicionamiento deja fuera, como veremos, la posibilidad de extender o ampliar los conceptos de magnitud y medida en matemáticas a otras cualidades que pueden entrar también dentro de la categoría de cantidades y, por tanto, capaces de ser medidas. Nos referimos, en concreto, a conceptos cuantitativos y métricos relativos (Ejemplo: aumento de temperatura, bajada de la bolsa, etc.) que son utilizados en situaciones cotidianas, pero cuyas propiedades no coinciden con las de los números naturales o enteros.

Por otro lado no está clara la distinción entre magnitudes matemáticas y magnitudes físicas, basada en que la medida de las primeras se define abstractamente mientras que la de las segundas se efectúa según unas técnicas e instrumentos apropiados (Diccionario citado, pág. 843). Más bien entendemos que, del universo de posibles cualidades medibles en sentido físico (entre cuyos estados se puede establecer un orden, en algunos casos una composición aditiva y en cualquier caso una asignación numérica biyectiva), la Matemática atiende formalmente a un tipo determinado de ellas (las que tienen una estructura isomorfa a un subconjunto de los números reales con la adición y el orden), mientras que las Ciencias Experimentales tienen en cuenta las necesidades prácticas y los aspectos empíricos de la medición, lo que lleva a la consideración de magnitudes que no cumplen los requisitos formales que la Matemática impone.

A partir de este concepto amplio de magnitud pasaremos a trabajar con modelos formales adaptados a las magnitudes, números y medidas que intervienen en el dominio en estudio.

7.2.2.- El concepto de cantidad.

Un elemento clave en el trabajo que presentamos, y que se encuentra en estrecha relación con el concepto de magnitud, es el concepto de cantidad. Desde un punto de vista genérico se dice que la cantidad es la propiedad de lo que puede medirse o numerarse; de todo lo que es capaz de aumento o disminución. Si queremos especificar algo más hemos de tener en cuenta la definición que se adopte para el concepto de magnitud. Así, en Matemáticas, se llama cantidad de magnitud a cada uno de los elementos del semigrupo (o grupo) que constituye la magnitud; cada cantidad es, por tanto, una clase de equivalencia formada por todos los elementos de un conjunto homogéneo[3] que verifican la identidad respecto de la característica sobre la que se define la relación de equivalencia. En Ciencias Experimentales se dirá, alternativamente, que presentan en el mismo grado la propiedad o característica que define la magnitud (o que son elementos "iguales" desde el punto de vista de la magnitud), lo que también se suele expresar diciendo que una cantidad es un "estado" determinado de una magnitud.

Por tanto, el concepto de cantidad en las Ciencias Experimentales es, igualmente, un concepto abstracto, ya que se refiere a la propiedad común de un conjunto de objetos o entes pertenecientes al "mundo sensible". Pero, además de que esta propiedad se refiere al "mundo físico" y, por tanto, está sujeta a las condiciones y limitaciones empíricas que la realidad impone, la diferencia con respecto a las matemáticas radica en el hecho de que existen cantidades numerables o medibles experimentalmente que no son consideradas como tales desde el punto de vista de la teoría matemática de magnitudes (Ejemplo: temperatura, otras magnitudes intensivas y no aditivas). Se puede decir, por tanto, que esta teoría proporciona modelos abstractos que son aplicables a una parte de las magnitudes y cantidades del "mundo sensible". Por el contrario, queremos poner de manifiesto que existen cantidades, mencionadas en otros capítulos como "dirigidas" o "adjetivadas", para las que es necesario adaptar los modelos abstractos de la teoría matemática de magnitudes.

7.2.3.- El concepto de medida.

En Matemáticas *"la medida es un isomorfismo entre semimódulos que conserva el orden"* (Chamorro, C.; Belmonte, J. M., 1988, pág. 145), de manera que lo que se establece, realmente, es una identificación entre el conjunto de cantidades y un subconjunto de los números reales. Según que este subconjunto sea N, Z, Q o R, la medida será natural, entera, racional o real. Asímismo, como consecuencia de la propia definición de magnitud, cualquier medida de una cantidad de magnitud viene expresada por un número y por una unidad de medida que se toma como referencia

Con independencia de las limitaciones empíricas de la medición, que conduce a la necesidad de trabajar en algunos casos con valores aproximados, el concepto de medida en Ciencias Experimentales es más general y será el que adoptaremos: *"Medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud"* (op. citada, pág. 143), definición que se adapta a cualquier enfoque, puesto que está supeditada a lo que se entienda por magnitud y por cantidad de una magnitud.

---

[3]Aquél entre cuyos elementos se puede establecer una relación de equivalencia.

7.3.- Consideraciones epistemológicas.

Al hilo de las reflexiones realizadas en el capítulo 3, en torno a la Filosofía de la Aritmética (apartado 3.5), nos proponemos completar los planteamientos básicos del estudio teórico. Nuestra preocupación se centra en precisar las relaciones que existen entre los conceptos implicados; clarificación que se sustenta en la teoría de las formas conceptuales científicas, que presentamos en primer lugar y de forma resumida. Un análisis posterior de los elementos fundamentales de dicha teoría, realizado bajo el enfoque didáctico, va a proporcionar el soporte para la construcción del modelo sobre el que se sustentan nuestros planteamientos teóricos.

7.3.1.- El proceso de constitución de los conceptos métricos.

Como se indicó en el apartado 3.7 del capítulo 3 exponemos, en este apartado, un análisis de las ideas fundamentales de la obra de Stegmüller, W. (1979), en la que el autor desarrolla una teoría filosófica sobre la naturaleza y el proceso de formación de los conceptos científicos. Igualmente se mencionará la incidencia de esta teoría en la investigación que presentamos.

Para el autor, la formación de los conceptos científicos está determinada no sólo por convencionalismos sino también por la observación sistemática, la generalización empírico-hipotética, la confirmación empírica así como por consideraciones intuitivas de fertilidad y simplicidad. Se trata, por tanto, de un enfoque en el que juegan un papel importante las consideraciones formales o convencionales y las consideraciones empíricas, dando lugar a un tratamiento más amplio que el que suelen tener las magnitudes en matemáticas, donde, como hemos visto en los apartados anteriores, el contenido queda restringido a los aspectos puramente formales y a un determinado tipo de magnitudes.

El punto de partida lo constituye la idea de que lo cualitativo y lo cuantitativo no expresan una separación o diferencia ontológica en la realidad, sino una *diferencia en el lenguaje*. En la realidad no existen dos tipos de fenómenos reales (cualitativos y cuantitativos), sino que estas expresiones se refieren al modo lingüístico que se utiliza para hacer referencia a ellos. En términos usuales se suele hablar de "cuantitativo" por oposición a "cualitativo", cuando, a veces, una cantidad puede ser interpretada como un estado o manifestación particular de una cualidad. Por otra parte el término “cuantitativo” se suele utilizar también para hacer alusión a aspectos "métricos", con la consiguiente confusión entre la cantidad y la medida. En lo sucesivo evitaremos estas confusiones distinguiendo entre lo cuantitativo (referente a la cantidad) y lo métrico (referente a la medida), distinción que queremos resaltar especialmente en el trabajo.

En función de que la evolución histórica de los conceptos científicos suele ir desde las formas lingüísticas más primitivas (cualitativas/clasificatorias) hasta las más avanzadas (cuantitativas/métricas), pasando por una fase de transición en la que se utilizan conceptos comparativos o topológicos, el autor establece tres tipos de lenguaje y tres sistemas conceptuales científicos: clasificatorio (cualitativo), comparativo o topológico y métrico (cuantitativo).

7.3.1.1.- Conceptos cualitativos o clasificatorios.

La mayoría de los conceptos de la vida cotidiana y de las ciencias son cualitativos, y se refieren al contenido de las designaciones de clases: "hombre", "casa", "virus", etc. "El objetivo de este tipo de conceptos es dividir en diversas clases a los objetos de un dominio".

Las condiciones que deben cumplir los conceptos clasificatorios científicos son las siguientes: que den lugar a clases delimitadas con exactitud (mutuamente excluyentes) y que la partición sea completa en el sentido de que la unión de clases sea el universo. Una división conceptual es "satisfactoria" si se cumplen dichas condiciones, de lo que se deduce que un gran número de conceptos comunes no proporcionan una clasificación satisfactoria, bien por vaguedad o inexistencia de criterios exactos de delimitación, bien por inconsistencias personales (una misma persona no utiliza las expresiones siempre con el mismo significado) o interpersonales (los miembros de una comunidad lingüística utilizan distintos significados).

Las formas conceptuales clasificatorias, en la medida en que son un medio para describir fenómenos con la intención de llegar a establecer leyes generales, proporcionan un contenido informativo escaso. En este sentido podemos hablar de formas conceptuales *inferiores* o *primitivas* por oposición a las métricas o cuantitativas, que, por su mayor complejidad, nivel de información, precisión y rigor, pueden denominarse formas conceptuales *superiores*. La *necesidad de precisar más la información y de enriquecer el sistema conceptual clasificatorio conduce a la introducción de conceptos topológicos o comparativos y conceptos métricos*, lo que supone, como veremos, afinar la clasificación y establecer un orden.

A pesar de todo ello, la formación de los conceptos "inferiores o primitivos" no supone una simplicidad de instrumentos y consideraciones, ya que está determinada no sólo por convencionalismos sino también por la observación sistemática, la generalización empírico-hipotética, la confirmación empírica y por consideraciones intuitívas de fertilidad y simplicidad.

7.3.1.2.- Conceptos comparativos o topológicos

"El paso a las formas conceptuales superiores discurre paralelamente a un aumento del contenido informativo. Los conceptos comparativos o topológicos son conceptos relacionales que permiten hacer comparaciones en el sentido de "más o menos" y se encuentran relacionados desde el punto de vista lingüístico con los comparativos gramaticales".

Los conceptos comparativos o topológicos:

1).- *Permiten emprender diferenciaciones conceptuales mediante el establecimiento de un orden jerárquico que conduce a una "cuasi-serie" (en una misma posición puede haber más de un elemento).*

2).- *Constituyen un importante término intermedio entre los conceptos cualitativos y los cuantitativos. Mediante ellos, se introduce un determinado tipo de orden en el dominio de objetos que facilita el paso a conceptos cuantitativos o métricos mediante una simple metrización del orden en cuestión*.

<u>7.3.1.2.A.- Introducción de conceptos comparativos</u>

Sea A el dominio de objetos para los que hay que introducir un concepto comparativo (A se concibe como una clase). El primer paso consiste en establecer un **orden serial**, para lo cual se introducen dos relaciones, una de precedencia P (orden) y otra de coincidencia C (equivalencia), que establecen un **cuasi-orden** en el dominio (Hempel, 1952).

La introducción de una relación de orden no se basa en procedimientos puramente convencionales. Por el contrario se han de utilizar resultados empíricos; las relaciones concretas son empíricas y las condiciones o propiedades formales que deben cumplir las relaciones P y C se convierten, en cada caso particular, en hipótesis empíricas.

Las **condiciones** que deben cumplir las relaciones C y P son:

- C es relación de equivalencia. De su aplicación se obtiene el conjunto cociente A/C.
- P es transitiva.
- P es C-irreflexiva: x C y □ x ¬P y (ningún objeto del dominio debe precederse a sí mismo y ningún objeto puede preceder a otro con el que esté en la relación de coincidencia).
- P es C-conexa: (x C y) v (x P y) v (y P x). (Todos los objetos del dominio deben ser comparables respecto de P y C).

Como consecuencia de estas condiciones:

- P es irreflexiva y asimétrica
- Dados x e y cualesquiera, se da una y sólo una de las relaciones:
- x C y, x P y, y P x
- x C y □ y P z □ x P z
- x P y □ y C z □ x P z

<u>Resumiendo</u>, se dice que P representa una serie respecto a C cuando:

a).- C es relación de equivalencia

b).- C y P deben excluirse mutuamente

c).- P es transitiva

d).- Para x e y cualesquiera del dominio A, debe darse una y sólo una de las afirmaciones: xCy, xPy, yPx.

"El par ordenado Q = (C, P) constituye una cuasi-serie (o concepto comparativo) para el dominio A"; dicho de otra forma, "las relaciones C y P establecen un concepto comparativo en el dominio A", o bien, "el dominio A es representable como cuasi-serie".

Todo concepto comparativo lleva consigo una *operación* que permite establecer la cuasi-serie (un medio práctico que evalúa cualitativamente la acción de comparar). Se puede decir, también, que el par ordenado Q = (C, P) constituye el instrumento básico para implantar una estructura relacional comparativa en el dominio A.

Algunos de las condiciones anteriores corresponden a hechos empíricos y no a verdades lógicas (no se pueden verificar en todos los casos, sino sólo en un número finito de ellos; no se puede deducir su validez al ser generalizaciones hipotéticas inverificables). En este nivel comparativo se mezclan la *formación de conceptos,* las *experiencias y* la *formación de hipótesis*, siendo necesarios tanto los resultados empíricos como las generalizaciones hipotéticas.

7.3.1.2.B.- Relaciones entre los conceptos comparativos y clasificatorios.

En el nivel de la clasificación se le asignan a las clases unos predicados. "Los predicados utilizados y los conceptos de clases designados por ellos, desaparecen completamente en el nivel comparativo. En su lugar aparecen dos *conceptos relacionales diádicos C y P* ". En este paso del nivel clasificatorio al nivel comparativo se pueden dar dos posibilidades:

1.- La relación de coincidencia establece una partición que coincide con la clasificación inicial: "se sustituyen n conceptos predicativos distintos (nivel clasificatorio) por un sólo concepto relacional diádico (coincidencia) con la misma eficacia que los n conceptos anteriores" y, por tanto, "no hay aumento de información, sino sólo simplificación técnica". Con la relación de precedencia y el orden inducido por ella se establece, por otra parte, una información nueva.

2.- La construcción de una cuasi-serie va acompañada de un refinamiento de la división en clases: "el aumento de información conseguido por medio del concepto comparativo es, por lo tanto, doble: diferenciaciones más precisas que en el nivel cualitativo e introducción del concepto relacional P".

El paso de los estadíos iniciales puramente cualitativos (división en dos clases) a la introducción de una cuasi-serie completa y exhaustiva o infinita en su caso, con el establecimiento de un concepto comparativo, debe pasar por sucesivas etapas de refinamiento de la clasificación inicial: a).- Dualidad simple; b).- Tres clases y establecimiento de un orden entre ellas; c).- Generalización a un número finito de clases; d).- En algunos casos, generalización a un número infinito de clases o hasta conseguir la seriación minimal.

La relación de cuasi-orden inducida por (C, P) se puede hacer más fuerte, convirtiéndola en una única relación de orden R (reflexiva, antisimétrica y transitiva; todas las demás propiedades se deducen de estas tres). De aquí se puede pasar al concepto más fuerte de "buen orden", si bien este concepto no es importante en la metrización.

7.3.1.3.- Conceptos cuantitativos o métricos

El paso a los conceptos métricos se realiza mediante funciones monádicas numéricas (correspondencias unívocas): *"Todos los conceptos cuantitativos o métricos, llamados también conceptos de magnitud, se introducen mediante funciones numéricas y se* *representan formalmente mediante functores"*. La función puede ser de punto o de conjunto. Distinguiremos entre: **metrización** (introducción de un concepto métrico) y **medición** (proceso empírico de determinación de un valor de una magnitud).

Existen dos maneras de introducir conceptos métricos en Ciencias Experimentales:

- metrización primaria o fundamental: metrizaciones de cuasi-series.

- metrización derivada o secundaria: Ej. densidad = masa/volúmen; temperatura (más compleja y depende de la longitud).

*7.3.1.3.A.- Metrización de cuasi-series que llevan a **magnitudes extensivas***

En las magnitudes llamadas extensivas (peso, longitud, volúmen, etc.) existe una operación semejante a la adición. Por el contrario, en las magnitudes no extensivas o intensivas (temperatura, etc.) no se cumple esa semejanza con la adición.

El producto de la metrización de una cuasi-serie extensiva es una **escala de proporciones** y se establece mediante un isomorfismo entre el dominio de la cuasi-serie y el dominio de los números (que suele ser un subconjunto de los números reales).

Las **condiciones necesarias** para la metrización de una cuasi-serie son las siguientes:

- Existe una función f entre Q (cuasi-serie o concepto comparativo) y R (números reales), tal que: - a cada x □ Q se le asigna un número real f(x).

- para todo x □ Q y para todo y □ Q, x C y □ f(x) = f(y).

- para todo x, y □ Q, x P y □ f(x) < f(y).

- Existe una operación de combinación en Q (que se puede denotar por H), semejante a la adición en R, de manera que f(x H y) = f(x) + f(y).

Por tanto, las tres **reglas** para la introducción de un concepto métrico extensivo son:

- regla de igualdad: x C y □ f(x) = f(y)

- regla del valor unidad: elección de un valor stándar arbitrario, motivado por el propio proceso de metrización.

- principio de aditividad: f(x H y) = f(x) + f(y)

Con ello "La metrización fundamental de una magnitud extensiva, se reduce al proceso de contar" y los elementos fundamentales son: el dominio básico Q, las relaciones C y P, la operación H de composición "aditiva" y el objeto stándar o unidad k.

*7.3.1.3.B.- Metrizaciones de cuasi-series que conducen a **magnitudes "intensivas"*** [4]

A diferencia de las escalas de proporciones para magnitudes extensivas (Ej. el peso), la temperatura se mide mediante una *escala de intervalos*, ocurriendo que las escalas de proporciones pueden considerarse como casos particulares de las escalas de intervalos.

En el caso de la temperatura, el paso a lo métrico no es tan sencillo como en el caso de las magnitudes extensivas ni tampoco menos importante que en ellas, puesto que responde especialmente a la necesidad de objetivizar el concepto. Dado que se carece en estos casos de

[4] "Algunos autores las llaman extensivas "no aditivas"". (el término "intensivo" se debe entender en estos contextos como equivalente a "no aditivo").

la operación de combinación H (las temperaturas no se pueden sumar), la construcción se hace constituyendo en primer lugar una **escala ordinal**:

$$(1) \quad \begin{cases} x \; C \; y \Leftrightarrow t(x) = t(y) \\ x \; P \; y \Leftrightarrow t(x) < t(y) \end{cases}$$

Para pasar de la escala (1) a una escala métrica, se han de añadir tres reglas más:

- elección de valor nulo o punto de partida (0ºC (agua en congelación))
- elección de un valor unidad (100ºC (agua en ebullición))
- introducción de una tercera relación tetrádica (igualdad de diferencias de valor), con lo que aparecen las longitudes en el termómetro y se obtiene una metrización derivada.

7.3.2.- La medida: síntesis entre la cantidad y el número.

La teoría que se ha expuesto sucintamente en el apartado anterior, se refiere a los conceptos científicos que tienen su origen en los fenómenos reales; en las experiencias con cualidades perceptibles. Pero dichas consideraciones son insuficientes cuando se pretenden estudiar los fenómenos desde la óptica de la Educación Matemática. No hay más que tener en cuenta la existencia de otros elementos importantes que afectan a los fenómenos educativos, tal y como se ha puesto de manifiesto en los apartados 4, 5 y 6 del capítulo 4, que constituyen perspectivas diferentes sobre el mismo tema y que han de ser convenientemente relacionados y combinados entre sí para obtener una información relevante y útil.

Formalmente, un concepto métrico extensivo aparece cuando se establece un isomorfismo entre el dominio de estados de un concepto comparativo (conjunto de cantidades) y una parte del conjunto de los números reales que asigna un número a cada uno de los elementos (clases) de la serie ordenada. Pero la comparación, por sí sola, lo único que aporta es el establecimiento de series ordenadas. Para que sea posible la metrización es necesario, como hemos visto, que, además del orden, exista una ley de composición aditiva o una relación adicional basada en alguna magnitud auxiliar (como es el caso de la longitud en la escala de temperaturas), que completen la estructura del concepto comparativo y permitan establecer el correspondiente isomorfismo. Con ello diremos que el concepto comparativo es metrizable extensivamente, adquiriendo el estatuto de concepto métrico desde el mismo momento en que se establece el isomorfismo. La ley aditiva entre los elementos de la serie ordenada o la relación auxiliar en el caso de las metrizaciones intensivas permitirán, por tanto, utilizar el término "magnitud" en su sentido matemático usual, en lugar del de concepto comparativo, y llamar "cantidades" a los elementos de la serie ordenada o estados del concepto comparativo.

La teoría de las formas conceptuales científicas, al mismo tiempo que clasifica los conceptos en las tres grandes categorías, establece implícitamente que los conceptos métricos se sustentan en los conceptos clasificatorios y comparativos correspondientes, que son los que sirven de soportes para la metrización. Esto quiere decir que un concepto métrico, como es el de "medida del peso", no sólo se caracteriza por un conjunto de valores numéricos con una serie de propiedades y operaciones, sino que integra, además, por medio del isomorfismo que establece la metrización, la estructura comparativa de la cualidad "peso", formada por la serie ordenada de los elementos cuya medida son los mencionados valores numéricos y por las relaciones propias de dicha estructura comparativa (operaciones de composición y transformación, similares a las operaciones aritméticas). Es en este sentido que se habla de "peso" o de "longitud" para integrar las estructuras métrica y comparativa en un sólo concepto que, a nivel de su utilización práctica, estaría incompleto si se considerase sólo la estructura métrica.

Una determinada medida de longitud tiene pleno significado por la existencia de una cantidad de longitud a la que aquélla hace referencia; por el contrario, las diferentes cantidades de longitudes pueden ser consideradas, con independencia de los valores numéricos correspondientes (medidas de longitudes), como meras cualidades perceptibles y distinguibles entre sí en virtud de la estructura comparativa que poseen. Nuestro planteamiento teórico, sostenido por las aportaciones que acabamos de presentar, establece que:

En el terreno de los fenómenos reales, el punto de vista cualitativo suele ser consustancial al punto de vista cuantitativo, previo y necesario para la existencia de este e independiente de él, lo que no ocurre en sentido contrario (no es frecuente que los números por sí solos, determinen en la práctica nuevas cualidades o magnitudes inexistentes con independencia de ellos). Más bien, lo que suele ocurrir es que la utilización de los conjuntos numéricos en la metrización de un concepto comparativo (magnitud o concepto cuantitativo) viene a completar y dar precisión y rigor al concepto, extendiendo en algunos casos el propio concepto cuantitativo allí donde aparecen las limitaciones perceptibles de la estructura comparativa.

Bien es verdad que, a nivel formal, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo, y es aquí donde reside toda la potencialidad de la metrización. Pero no es menos cierto, que dicho proceso de abstracción constituye sólo una parte del estudio de los conceptos métricos (la que corresponde al campo propiamente matemático), requiere de un estado avanzado de los conocimientos y un grado de separación de la realidad que sobrepasan los límites y el interés de nuestra investigación didáctica. Centraremos la atención en la metrización de conceptos comparativos; en los prolegómenos concretos del trabajo matemático formal; en los inicios de la construcción de los conceptos métricos; es ahí donde se mezcla lo empírico con lo formal, el conocimiento físico con el conocimiento lógico-matemático.

Por otra parte, esta indisociabilidad de los conceptos comparativos metrizables y los propiamente métricos, de las cantidades y las medidas, se encuentra también en el proceso histórico de formación de los conceptos numéricos. No hay más que recordar las constantes referencias intuitivas a la longitud, por ejemplo, para la determinación de propiedades y para la propia construcción de los conjuntos numéricos. Podemos decir que, en el ámbito de los fenómenos reales, los conjuntos numéricos constituyen modelos matemáticos para determinadas cualidades metrizables y que, al mismo tiempo, las series ordenadas de estados de cualidades metrizables (conjuntos de cantidades) constituyen modelos cualitativos (experimentales y manipulativos en términos didácticos) de ejemplificación de los conjuntos numéricos. Ambos sistemas son isomorfos y se sustentan mutuamente a nivel de la acción práctica y, posiblemente, a nivel de la construcción de dichos conceptos por parte del sujeto individual.

7.3.3.- Algunas consecuencias para nuestra investigación.

- Los conceptos comparativos albergan por construcción los elementos básicos de una estructura cualitativa relativa (doble sentido y doble signo), caracterizada por la relación de precedencia y el orden inducido por ella.

- Los conceptos métricos se generan en una síntesis entre los conceptos comparativos y los números. Las medidas constituyen así elementos nuevos que integran los aspectos cualitativos y cuantitativos de la realidad. Los primeros son consustanciales a los segundos, previos y necesarios para la existencia de estos e independientes de ellos.

- Los números se tratan en la teoría de Stegmüller como conceptos acabados y construídos al margen del proceso de metrización; utilizados "ad hoc" como instrumentos necesarios para la formación de los conceptos métricos. Desde el punto de vista del aprendizaje matemático cabría interpretar, en virtud de los isomorfismos existentes, que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, los conceptos numéricos y los conceptos métricos. Las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.

- La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y epistemológicamente correcta para un análisis del tipo que estamos realizando, tal y como mantenemos a lo largo del trabajo, no puede plantearse en términos analíticos en los inicios de la educación del pensamiento numérico. De hecho, a un nivel formal y una vez establecido un concepto métrico, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo; pero ello ocurre en un nivel de abstracción superior al del propio proceso de formación de dicho concepto métrico.

- Las magnitudes intensivas, como la temperatura, sufren una metrización especial sin necesidad de que exista una ley de composición aditiva. Existen por tanto metrizaciones que consisten en la asignación, conservando el orden, de valores numéricos a cantidades.

- Podemos distinguir entre metrizaciones "absolutas" y "relativas", según que el concepto comparativo o dominio de cantidades tenga o no primer elemento para series infinitas o que el origen de cantidades se encuentre en un extremo o en un lugar intermedio de la serie (serie dualizada). Tratándose de cantidades discretas o discretizadas, las primeras serán funciones con imágenes en el conjunto de los números naturales, mientras que las segundas requerirán de conjuntos numéricos con una "simetría central", como es el caso de los números enteros.

7.4.- Procesos, conceptos y relaciones que intervienen en el dominio usual de aplicación de los números naturales y los números enteros.

En este apartado vamos a centrar nuestra atención en los procesos de metrización de cantidades discretas o discretizables elementales con estructura aditiva o simplemente ordinal, es decir, en el campo de los conceptos métricos discretos elementales, en el que intervienen tres elementos íntimamente relacionados entre sí:

- las **cantidades**, como manifestaciones perceptibles de los estados o modalidades de cualidades o magnitudes;

- los **números**, como objetos matemáticos o entes abstractos con estrechos vínculos con las cantidades y que van a permitir, a través de la metrización, trascender las limitaciones propias de las manipulaciones empíricas meramente cualitativas;

- las **medidas**, como resultados de la combinación o integración de los dos elementos anteriores en el campo de aplicación concreta de la numeración y el cálculo, de donde surgen los problemas y ejercicios prácticos escolares con contenido no exclusivamente formal utilizados en la enseñanza-aprendizaje de los números y las operaciones aritméticas.

Para analizar los problemas y situaciones que se suelen emplear en el tratamiento didáctico de los números enteros, vamos a utilizar los siguientes conceptos fundamentales:

a).- cantidad, número y medida;

b).- composición aditiva de cantidades y composición aditiva de medidas;

c).- transformación de cantidades y transformación de medidas;

d).- cambio de origen o referencia;

e).- comparación de cantidades y comparación de medidas.

Consideramos por tanto conjuntos o dominios de entes de diferente naturaleza, una serie de funciones y unas relaciones que es preciso delimitar y analizar para resolver los interrogantes y lagunas que se constatan, desde la óptica de la Educación Matemática, en la aplicación práctica de los primeros conjuntos numéricos.

Partiremos de los principios expuestos y de la terminología utilizada en los apartados anteriores para *delimitar el campo de las situaciones relativas*; un campo netamente didáctico que trataremos de definir teóricamente como parte importante de la educación del pensamiento numérico. Para ello, además del enfoque científico experimental resumido en el apartado anterior, utilizaremos los conceptos y las construcciones matemáticas expuestas con anterioridad (magnitud, metrización de una magnitud, estructuras algebraicas y aplicaciones relacionadas con la metrización, etc.), junto a consideraciones didácticas que tienen que ver con el currículum, los problemas y situaciones de aplicación práctica y los tipos de representación.

7.4.1.- Diferentes clases de cantidades y medidas discretas.

Sea A un dominio de cantidades discretas o modalidades de una cualidad o magnitud discreta susceptible de metrización, y sean P y C las relaciones de "precedencia" y de "coincidencia" con las propiedades ya definidas anteriormente, las cuales dotan al conjunto A de una estructura comparativa que simbolizaremos mediante el par (A, Q(C, P)). El conjunto Q = (A/C, P) es un conjunto ordenado de cantidades o una serie ordenada que puede ser finita o infinita numerable, con primer elemento o sin primer ni último elementos.

Si A es un dominio de cantidades "absolutas" (numerosidades de colecciones o cantidades de magnitudes absolutas discretas o discretizadas), Q = (A/C, P) es un conjunto ordenado con primer elemento que notaremos por $\mathbf{Q_N}$ y a cuyos elementos llamaremos **"cantidades naturales"**, metrizable mediante una aplicación en el conjunto de los números naturales. Si, por el contrario, A se encontraba originalmente dualizado (cantidades de dos categorías contrapuestas simétricas en torno a una referencia), Q = (A/C, P) es una serie ordenada de cantidades dualizadas que notaremos por $\mathbf{Q_Z}$ y a cuyos elementos llamaremos **"cantidades enteras"**, bien finita, o bien sin primer ni último elementos, que admite directamente una metrización o una asignación numérica mediante una aplicación en el conjunto de los números enteros (este es el caso por ejemplo de cantidades que se representan mediante escalas sin principio ni fin; determinadas cantidades en economía; temperaturas y otras). $\mathbf{Q_Z}$ representa tanto a las cantidades enteras sin una ley de composición interna aditiva (temperatura o cronología ordinaria), como a aquéllas entre las que se puede definir una ley de tal tipo (cantidades monetarias discretas en el contexto de los saldos bancarios). En ambos casos, la metrización será o una aplicación entre conjuntos que da lugar a una escala o un isomorfismo. Por comodidad, unificaremos la notación teniendo en cuenta esta precisión.

Además de las cantidades naturales y enteras postulamos un tercer tipo de cantidades, que no se contemplan usualmente como tales a pesar de la existencia muy extendida de las medidas correspondientes, a las que llamamos **naturales relativas**[5] y notamos por $\mathbf{Q_{NR}}$, las cuales se diferencian de las enteras y las naturales en aspectos básicos de las estructuras ordinales y algebraicas correspondientes.

Las cantidades naturales surgen del establecimiento de conceptos comparativos o series ordenadas sobre objetos o colecciones que presentan unas cualidades en distinto grado o, dicho de otra forma, de la comparación directa del grado en que se presenta una cualidad en objetos o colecciones, mientras que las cantidades naturales relativas surgen de la comparación de las cantidades que resultan del proceso anterior. Estamos ante dos tipos de cantidades diferentes, lo que no impide que utilicemos la misma terminología para ambas, ya

[5] Llamadas “cantidades dirigidas” por Bell, A. (1986).

que son susceptibles de una asignación numérica que permite trabajar desde un punto de vista métrico.

En lo que respecta a la medida existen dos tipos de medidas discretas reconocidas, como son las medidas naturales (que notaremos por $\mathbf{D_N}$) y las medidas enteras (que notaremos por $\mathbf{D_Z}$). Al mismo tiempo constatamos la existencia de un tercer tipo de expresiones métricas, conocidas en el ámbito de la Educación Matemática como "números/cantidades dirigidas, adjetivadas o relativas", que se consideran usualmente incluídas en $\mathbf{D_Z}$ pero que vamos a distinguir y separar de las medidas enteras en atención a las características diferenciadoras que presentan. Este tercer tipo de medidas, que llamaremos medidas naturales relativas y notaremos por $\mathbf{D_{NR}}$, no se contemplan como tales medidas separadas de las enteras, a pesar de que ambos conjuntos se refieren a dominios de cantidades diferentes ($\mathbf{Q_Z}$ y $\mathbf{Q_{NR}}$).

7.4.2.- Los diferentes tipos de números.

Los conjuntos numéricos que regulan matemáticamente el campo de problemas y situaciones del dominio considerado son los números naturales y los números enteros. No obstante, para completar un modelo que trate de organizar completamente el dominio no podemos considerar, tanto desde un punto de vista práctico como por coherencia lógica, sólo dos conjuntos numéricos para atender a los tres tipos de medidas de naturaleza y funcionamiento diferentes.

La necesidad de un tercer conjunto numérico elemental no proviene, como ya hemos mencionado, de una necesidad estrictamente formal sino de una necesidad didáctica para la comprensión de las nociones matemáticas en juego. Desde esta perspectiva reclamamos, y nos disponemos a desarrollar, un tratamiento más detallado del tema que el que proporcionan las construcciones formales conocidas y consolidadas.

7.4.3.- Las relaciones que intervienen.

Analizando, con respecto a los conceptos de cantidad, número y medida, la estructura y el funcionamiento de las relaciones básicas que aparecen en los fenómenos del dominio considerado, encontramos tres tipos de relaciones simples que regulan el funcionamiento de los tres ámbitos conceptuales en que se divide el campo: el cuantitativo, el numérico y el métrico.

Por ser $\mathbf{Q_N}$ un semigrupo con la composición aditiva de cantidades (y con mayor motivo el grupo $\mathbf{Q_Z}$), compatible con el orden propio de la estructura comparativa, existen unas relaciones cuantitativas en virtud de la combinación entre la asimetría y la adición (lo cual es válido igualmente para las medidas y los números). Estas relaciones[6], que son binarias (se establecen entre pares de cantidades o medidas), se materializan en la práctica en tres tipos de acciones simples diferentes: **comparaciones**, **transformaciones** y

[6] de utilización aceptable entre cantidades o medidas pero de utilización poco ortodoxa entre números.

combinaciones, terminología[7] que será utilizada también para las medidas en virtud de los isomorfismos existentes y que puede ser adaptada igualmente al caso de los números.

Las comparaciones, que notaremos mediante la letra "**C**" y un subíndice que indica el conjunto entre cuyos elementos se realiza la comparación (cantidades, números o medidas), se basan en la *estructura de orden* y se definen mediante *aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia*; las transformaciones, que notaremos mediante la letra "**T**"[8] con su subíndice correspondiente al igual que en el caso anterior, hacen intervenir tanto la *estructura de orden* como la *estructura aditiva* y se representan mediante *correspondencias basadas en productos cartesianos mixtos*; por último, las combinaciones, que notaremos en cada caso mediante el símbolo que hace referencia a la ley de composición aditiva de que se trate (rectángulo, triángulo o círculo para las cantidades, el mismo símbolo con el signo de la suma en su interior para las medidas y el signo de sumar ordinario para los números), se basan exclusivamente en la *estructura aditiva* y se definen mediante la ley de composición interna correspondiente. Aquí nos limitamos a precisar e incluir dichas relaciones en el esquema de la figura 7.3; el caso de la comparación será estudiado con más detalle en los próximos apartados. En el apartado 7.5 y en el capítulo 9 se tratan más extensamente estas relaciones a propósito de las consecuencias del estudio de cara a la organización del dominio tratado.

7.4.4.- Cantidades y medidas naturales relativas.

La necesidad didáctica de dotar de significado y de contenido concreto a los números enteros conduce a un panorama confuso, en el que se mezclan conceptos, conjuntos y relaciones de diferente naturaleza bajo el control de las construcciones matemáticas formales. En este sentido, el proceso de abstracción y generalización matemática ha condensado la información[9], en este caso concreto, de forma encomiable para el bien de las matemáticas pero, al mismo tiempo y por los mismos motivos, de forma excesiva para la necesaria clarificación de los contenidos con vistas a su tratamiento didáctico.

En este apartado, vamos a construir un modelo que ofrezca una explicación satisfactoria a los desajustes que se señalan en el capítulo 1, que sea compatible con los conocimientos y la información disponible mencionada en los antecedentes, y que organice suficientemente el dominio en estudio. Para ello utilizaremos algunos recursos matemáticos, bajo un enfoque de construcción semiformalizada, con el fin de definir nuevos conceptos, cuyo estudio formal exhaustivo, sin embargo, excede de los propósitos de esta investigación.

Salvo algunas cuestiones formales que requieren de un desarrollo detallado y que serán objeto de un estudio posterior, pasaremos a describir el análisis que se resume en la figura 7.3 y cuya notación se detalla en la figura 7.4; ambas se incluyen al final del apartado.

---

[7]utilizada por Carpenter y Moser (1983) para establecer una clasificación semántica de los problemas aditivos.

[8]Sólo aparecen en la figura 7.1, en la parte del diagrama correspondiente a la medida.

[9]Recordemos el "Principio de permanencia de las leyes formales" de Hankel y la construcción formal de Z por pares ordenados.

Sea $\mathbf{Q_N}$ un conjunto de cantidades naturales de cualquier cualidad o magnitud discreta metrizable, ordenadas mediante una relación de precedencia que notaremos por "<". Suponemos, además, que estamos hablando de cantidades y medidas de la misma cualidad o magnitud, es decir, estamos tratando en todos los casos con conjuntos "homogéneos".

En $\mathbf{Q_N}$, existe una operación de composición aditiva entre cantidades (que notaremos por $|$) que es compatible con el orden establecido, se define a partir de él y dota al conjunto de una estructura de semigrupo ordenado. De esta manera, ($\mathbf{Q_N}$, $|$, <), es un semigrupo aditivo de "cantidades naturales", isomorfo a una parte de **N** con la operación suma y el orden natural establecido y, por tanto, metrizable mediante el isomorfismo de semigrupos:

f_N : $\mathbf{Q_N}$ $\varnothing$ **N** de tal manera que para a □ $\mathbf{Q_N}$ y u la unidad de medida elegida siendo a = n . u, f_N (a) = f_N (n . u) = n con n □ N y a, u □ $\mathbf{Q_N}$.

La metrización de la serie de cantidades naturales $\mathbf{Q_N}$, nos permite definir el conjunto:

$$\mathbf{D_N} = \text{Grafo } (f_N) = \{ n(u) = (a, n) \ / \ f_N (a) = n \} \quad ; \quad \mathbf{Q_N \ x \ N} \ \square \ \mathbf{D_N}$$

de **medidas naturales** de la cualidad o magnitud considerada, cuya relación con el conjunto de los números naturales queda establecida por medio del isomorfismo:

$$f'_N : \mathbf{N} \ \varnothing \ \mathbf{D_N}$$

Estas medidas se suelen representar, para cada determinación concreta del conjunto homogéneo $\mathbf{D_N}$, por un número natural acompañado de la denominación de la unidad de medida de que se trate. En términos prácticos, hay multitud de ejemplos en la enseñanza elemental: cardinalidad de colecciones ("3 canicas", "5 coches", "2 caramelos", "ningún lápiz", etc.); medidas de magnitudes discretizadas ("3 kilos", "12 kilómetros", etc.), etc..

El isomorfismo f'_N permite establecer en $\mathbf{D_N}$ una "operación" de composición aditiva de medidas naturales definida de la siguiente forma:

$$\boxplus : \mathbf{D_N \ x \ D_N} \longrightarrow \mathbf{D_N}$$

tal que para cualquier par de medidas homogéneas ((a, n), (b, n´)) □ $\mathbf{D_N}$ **x** $\mathbf{D_N}$,

$$(a, n) \boxplus (b, n') = n\,(u) \boxplus n'(u) = (n + n')(u) = (a \ \square\, b \, , n + n')$$

Esta ley de composición aditiva completa el proceso cantidades-números-medidas en el contexto natural, poniendo de manifiesto la diferenciación de los conceptos que intervienen.

El proceso descrito hasta aquí para las cantidades y medidas naturales se repite para las cantidades y medidas enteras sin más que modificar los planteamientos, teniendo en cuenta las estructuras ordinal y algebraica de los conjuntos correspondientes. Hemos optado, en consecuencia, por no incluir dicho proceso, considerando la similitud con el que se ha descrito.

La comparación de cantidades naturales ($\mathbf{C_{QN}}$) o de medidas naturales ($\mathbf{C_{DN}}$) conduce, a partir del conjunto de pares ordenados, al establecimiento de dos *relaciones o diferencias orientadas*, recíprocas entre sí, para cada pareja de cantidades o medidas naturales. Estas relaciones orientadas, que son asimétricas en virtud de la estructura ordinal, van a dar lugar al doble sentido en el campo de las medidas (y, según Russell, B. (1973), al doble signo en Matemáticas) (ver González, J. L. y otros, 1990, págs. 70 y 71) y constituyen el soporte que va a generar la aparición de nuevos entes que llamaremos **<u>cantidades</u> <u>o</u> <u>medidas</u> <u>naturales</u> <u>relativas</u>** (notadas respectivamente por $\mathbf{Q_{NR}}$ o $\mathbf{D_{NR}}$). La introducción, en $\mathbf{Q_N \times Q_N}$ o en $\mathbf{D_N \times D_N}$, de una correspondencia que da origen al conjunto de comparaciones de medidas naturales y de una relación de equivalencia sobre dicho conjunto, nos permitirá definir, posteriormente, los nuevos entes mencionados; en efecto:

En el caso de las medidas naturales (la construcción sería análoga para cantidades) definimos formalmente la **<u>comparación de medidas naturales</u>** a partir de la correspondencia:

$$\mathbf{c_{DN}} \;:\; \mathbf{D_N \times D_N} \;\varnothing\; \mathbf{D^C_N} \subset \{(\mathbf{D_N} \times \mathbf{D_N}) \times \mathbf{D_N}\} \approx \{\mathbf{D_N} \times (\mathbf{D_N} \times \mathbf{D_N})\}$$

tal que para cualquier ((a, n), (b, n')) □ $\mathbf{D_N \times D_N}$, se define:

$$\mathbf{c_{DN}}((a, n), (b, n')) = \begin{cases} (((a, n), (b, n')),\ n - n') & \text{para } a \geq b \\ (n' - n,\ ((a, n), (b, n'))) & \text{para } a \leq b \end{cases}$$

De esta forma cada elemento de $\mathbf{D^C_N}$ es una comparación de medidas naturales, definida mediante un par ordenado cuyas proyecciones son, a su vez, un par ordenado de medidas naturales y una medida natural.

<u>*Definimos*</u> :- **<u>diferencia natural</u>** entre dos medidas naturales distintas: la medida natural que se obtiene como resultado de la composición sustractiva (o descomposición) entre la mayor y la menor de ambas. La diferencia natural es única para cada pareja de medidas naturales.

- **<u>sentido de una comparación</u>** entre dos medidas naturales: cada una de las dos relaciones referente-comparado que se pueden establecer y que se reflejan en los dos pares ordenados que se pueden formar con ellas.

- **<u>diferencia orientada o comparación</u>** propiamente dicha: cada par ordenado constituído por la diferencia natural y por el sentido de la comparación; toda pareja de medidas naturales admite dos comparaciones o diferencias orientadas, definidas por la diferencia natural, que es única e igual para las dos, y por cada uno de los dos sentidos de comparación.

- **<u>comparaciones homólogas</u>**: cuando sus proyecciones son de la misma naturaleza o, en otras palabras, cuando ambas se encuentran orientadas en el mismo sentido.

En $\mathbf{D^C_N}$ se define la siguiente <u>relación de equivalencia</u> que notaremos $\mathbf{R_{DN}}$:

"dos comparaciones pertenecen a la misma clase si son homólogas y sus diferencias naturales son iguales".

Esta relación induce la aplicación:

$$\mathbf{c'_{DN}} \;:\; \mathbf{D^C_N} \;\varnothing\; \{\mathbf{D^C_N} / \mathbf{R_{DN}}\} = \mathbf{D_{NR}}$$

definida de la siguiente manera: dada una comparación c_{DN} ((a, n), (b, n')) □ $\mathbf{D^C_N}$, definimos $\mathbf{c'_{DN}}$(c((a, n), (b, n'))) = (q_r, r) donde (q_r, r) □ $\mathbf{D_{NR}}$ siendo q_r una cantidad natural relativa y r un par compuesto por un número natural y uno de los dos signos duales "+" y "-" que proceden del sentido de la comparación, de tal forma que:

$r = (n - n')^{+}$ para $a = b \_ h$, $n > n'$ y $q_r = h^{+}$ siendo h una cantidad natural

$r = (n' - n)^{-}$ para $b = a \_ h$, $n < n'$ y $q_r = h^{-}$

$r = 0^{+}$ para $a = b \_ q_0$, $n = n'$, $r = (n - n')^{+}$; $q_r = q_{r0} = q_0^{+}$ siendo q_0 la cantidad natural nula y q_{r0} la cantidad natural relativa nula "positiva".

$r = 0^{-}$ para $b = a \_ q_0$, $n = n'$, $r = (n' - n)^{-}$; $q_r = q_{r0} = q_0^{-}$ siendo en este caso q_{r0} la cantidad natural relativa nula "negativa".

Como comparación de medidas aparece el doble aspecto numérico y cuantitativo: en el aspecto numérico la comparación se reduce a la sustracción natural; en el aspecto cuantitativo se reduce a la composición-descomposición aditiva de cantidades y al orden de comparación que da lugar al doble cero.

El proceso descrito anteriormente se puede resumir en la siguiente composición de correspondencias que aparece esquematizada como $\mathbf{C_{DN}}$ en el cuadro de la figura 7.3:

$$\mathbf{D_N \times D_N} \quad \varnothing \quad \mathbf{D^C_N} \varnothing \{\mathbf{D^C_N / R_{DN}}\} = \mathbf{D_{NR}}$$

o de forma abreviada: $\mathbf{C_{DN}} = \mathbf{c'_{DN}} \perp \mathbf{c_{DN}}$: $\mathbf{D_N \times D_N} \quad \varnothing \{\mathbf{D^C_N / R_{DN}}\} = \mathbf{D_{NR}}$

A partir de la construcción formal indicada se puede definir entre los elementos de $\mathbf{D_{NR}}$ la relación de orden: para a, b □ **N** y a^{i}, b^{j} □ $\mathbf{D_{NR}}$, a^{i} □ b^{j} sii $(a \leq b)$ □ $(i = j)$

donde hemos simplificado la notación utilizada en los párrafos anteriores.

Dicha relación, inducida por el orden natural, dota al conjunto de una estructura de orden parcial que, comparada con la de orden total que poseen las medidas enteras, presenta una inversión en el orden entre los elementos pertenecientes a la "región negativa". En los capítulos 8 y 9 se expone un exámen ejemplificado de esta estructura ordinal.

Las cantidades o medidas naturales relativas se suelen representar, en la práctica, mediante una cantidad natural o un número natural y un signo, símbolo, adjetivo, verbo de acción, partícula o elemento dual que indica uno de entre dos sentidos opuestos (para el caso de las medidas: "subir 3 escalones", "ganar 5 canicas", "1 pastel más", "2 pesetas menos", etc.). Por comodidad y para diferenciar las notaciones, utilizaremos para las cantidades y medidas naturales relativas un superíndice con dos símbolos posibles: "+" y "-".

El modelo geométrico de este nuevo conjunto $\mathbf{D_{NR}}$, a diferencia de los modelos natural o entero tan familiares, es el que podemos denominar "doble natural" o "natural relativo" y aparece esquematizado en la figura 7.1 mediante dos semirrectas naturales enfrentadas u opuestas una de la otra; una de ellas representa las cantidades o medidas con superíndice "+" o "positivas"[10] y la otra, las cantidades o medidas con superíndice "-" o "negativas". La figura 7.2 esquematiza las situaciones con dos variables.

[10]Esta asignación es arbitraria. Diremos que son positivas por oposición a las negativas o viceversa.

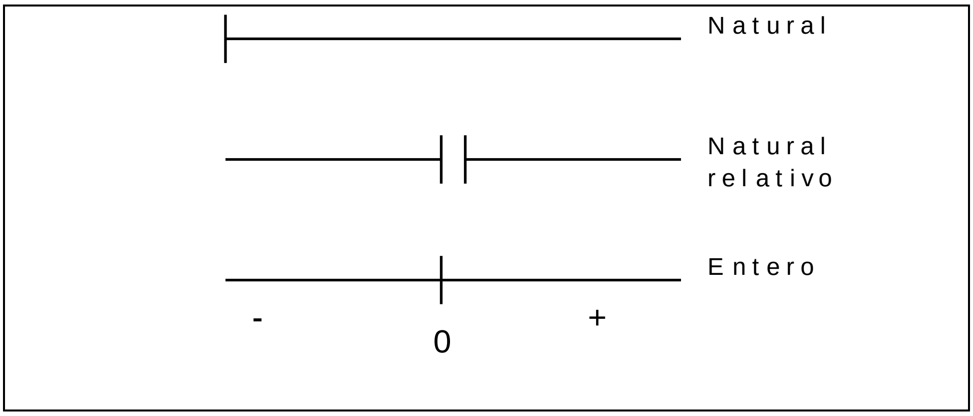


Figura 7.1.- Esquemas geométricos de los tres contextos que intervienen.

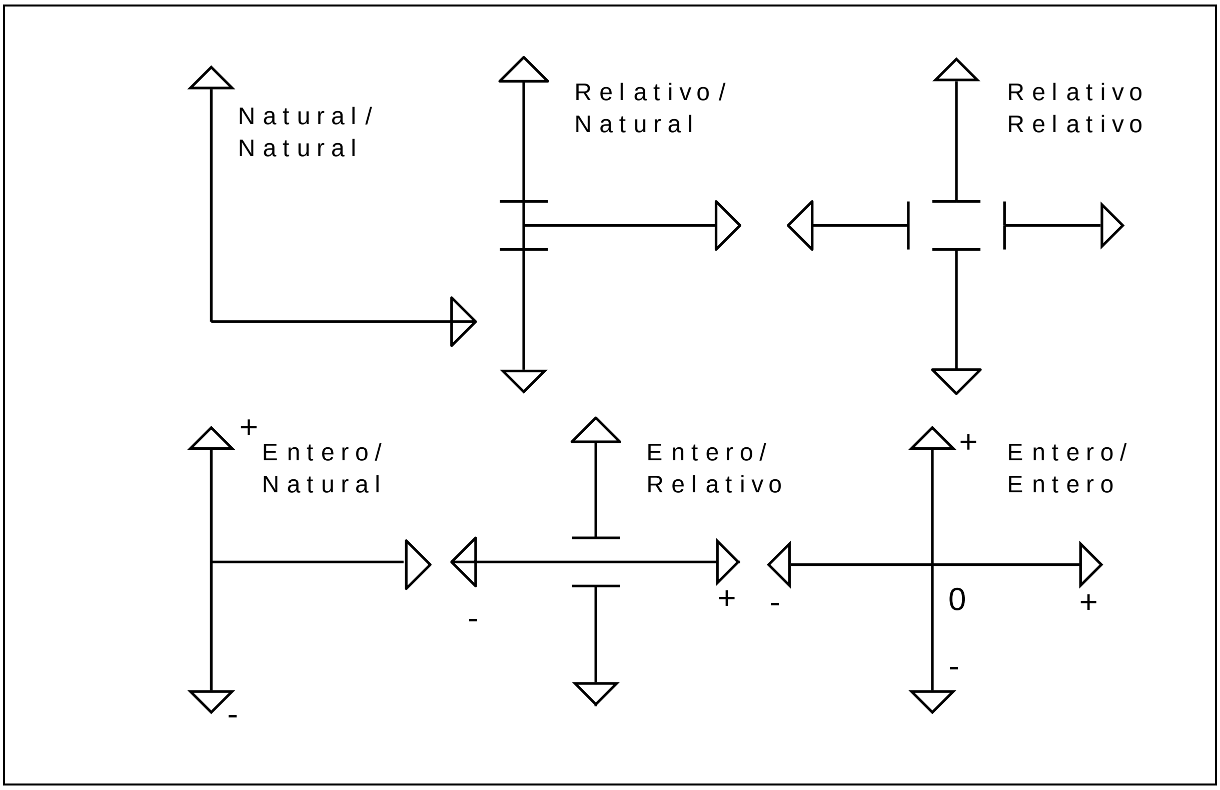


Figura 7.2.- Esquemas para dos variables combinadas.

Un exámen del funcionamiento práctico en diferentes contextos de las medidas naturales relativas, revela la existencia de composiciones aditivas informales cuya justificación no se deduce directamente de los planteamientos anteriores. En consecuencia establecemos en $\mathbf{D_{NR}}$ la ley de composición aditiva definida de la siguiente manera:

$$H : \mathbf{D_{NR}} \times \mathbf{D_{NR}} \varnothing \mathbf{D_{NR}}$$

$(a, n^{+})\ H\ (b, m^{+}) = (c, (n + m)^{+})$

$(a, n^{-})\ H\ (b, m^{-}) = (c, (n + m)^{-})$ (estabilidad de cada parte para la suma natural)

$(a, n^{+})\ H\ (b, m^{-}) = (c, (n - m)^{+})$ si $n > m$

$= \ (c, (m - n)^{-})$ si $n < m$

(a, n^{i}) H $(b, m^{j}) =$ $(q_{ro}, 0^{i})$ si $n = m$; i, j □ $\{\{+\}, \{-\}\}$; $i \neq j$

donde n, m □ **N** , c = a O b (composición aditiva de cantidades naturales relativas), q_{ro} la cantidad natural relativa nula y a, b, c □ $\mathbf{Q_{NR}}$.

Con esta ley de composición, que verifica la propiedad asociativa, el conjunto $\mathbf{D_{NR}}$ tiene una estructura algebraica de <u>semigrupo aditivo no conmutativo, sin elemento neutro y con dos elementos nulos no permutables entre sí</u> (Condamine, M. 1971, pág. 108).

Con la unificación de los dos ceros o medidas naturales relativas nulas (aplicación notada por u_{d0}) y la unificación del orden se obtiene el conjunto de medidas enteras $\mathbf{D_Z}$, que con la ley de composición interna aditiva (notada en la figura por un triángulo con el signo de la suma de números enteros en su interior) tiene una estructura de grupo abeliano y ordenado. Las correspondientes transformaciones de medidas naturales y enteras completan la estructura del campo de medidas que aparece esquematizado en la parte punteada de la figura 7.3 y cuya notación se explica en la figura 7.4; un dominio dentro del campo conceptual aditivo al que pertenecen las situaciones y problemas elementales que se analizan con detalle en el capítulo 9.

<u>7.4.5.- Los números naturales relativos.</u>

Del análisis de las características de las medidas naturales relativas, de las diferencias y relaciones existentes entre los tres tipos de medidas y de las relaciones entre las medidas y los conjuntos numéricos se constata, por un lado, la ausencia de un modelo numérico que regule de forma satisfactoria el funcionamiento de dichas medidas y, por otro, la importancia y la necesidad didáctica de disponer de un modelo de tal tipo. En los párrafos que siguen se pone de manifiesto, además, que dicho modelo numérico puede ser construído formalmente mediante un proceso deductivo de características similares al que se ha desarrollado para las medidas.

En lugar de utilizar cantidades o medidas de una cualidad o magnitud concreta, podemos repetir el proceso descrito con cantidades o medidas aisladas referidas a cualquier cualidad o magnitud discreta, lo que se puede hacer mediante el paso al cociente y el establecimiento de la relación de equivalencia apropiada. Desde este punto de vista el razonamiento se simplifica, por supresión de determinadas distinciones introducidas por la pluralidad de cantidades y unidades de medida, dando lugar a un nuevo proceso que, unido a la necesidad lógica de completar el esquema de isomorfismos, nos conduce a los siguientes conjuntos numéricos:

$\mathbf{D^*_N = N}$

$\mathbf{D^*_{NR} = \{ N \times \{+\} \} \approx \{ N \times \{-\} \} = N^{+} \approx N^{-} = N_R}$

$\mathbf{D^*_Z = Z}$

Además de los números naturales y los números enteros, se obtiene un tercer tipo de números que llamamos **"números naturales relativos"** y que distinguimos claramente de los otros dos conjuntos numéricos desde el mismo enfoque didáctico que nos ha llevado a realizar este análisis. Como se refleja en el esquema de la figura 7.3, este conjunto de números *cubre una laguna* salvada por la aplicación natural k y la definición de suma de números enteros.

La construcción formal del conjunto de los números naturales relativos no se va a abordar en este trabajo de forma rigurosa. En su defecto se expone a continuación una descripción ejemplificada del funcionamiento y de las principales propiedades de estos números. Las cuestiones formales que quedan pendientes, serán objeto de atención de una investigación posterior.

7.4.5.1.- Un ejemplo de los números naturales relativos.

La estructura entera aditiva es bien conocida. Sin embargo, la estructura natural relativa aditiva, aunque de utilización cotidiana y familiar, no es conocida y tampoco se encuentra formalizada más allá de lo que aparece en el presente trabajo de investigación. Por este motivo, y con objeto de proporcionar un soporte intuitivo para el estudio fenomenológico y lingüístico que vamos a exponer en el capítulo 8, desarrollamos a continuación un ejemplo concreto.

Supongamos un juego en el que se dispone de dos dados ideales iguales con infinitas caras cada uno. En cada cara hay un número natural y cada número aparece en dos colores diferentes en el dado (por ejemplo: rojo y azul). El color rojo significa "ganar" y el azul "perder" la cantidad que indica el número. Cada número coloreado representa una medida natural relativa.

Cada jugador tira, en cada jugada, los dos dados y debe componer los resultados independientes para obtener un resultado único, de acuerdo con los siguientes criterios:

m (rojo) H n (rojo) = (m + n) (rojo) gana m y gana n, entonces gana (m + n)
siendo "+" la suma natural y m y n,
cualesquiera números naturales

m (azul) H n (azul) = (m + n) (azul) pierde m y pierde n, pierde (m + n)

m (azul) H n (rojo) = (m - n) (azul) pierde m y gana n con m > n, pierde (m - n)
donde "-" es la sustracción natural.

= (n - m) (rojo) pierde m y gana n con n > m, gana (n - m)

(1) = 0 (rojo) y 0 (azul) pierde m y gana n con m = n, <u>ni gana ni pierde</u>

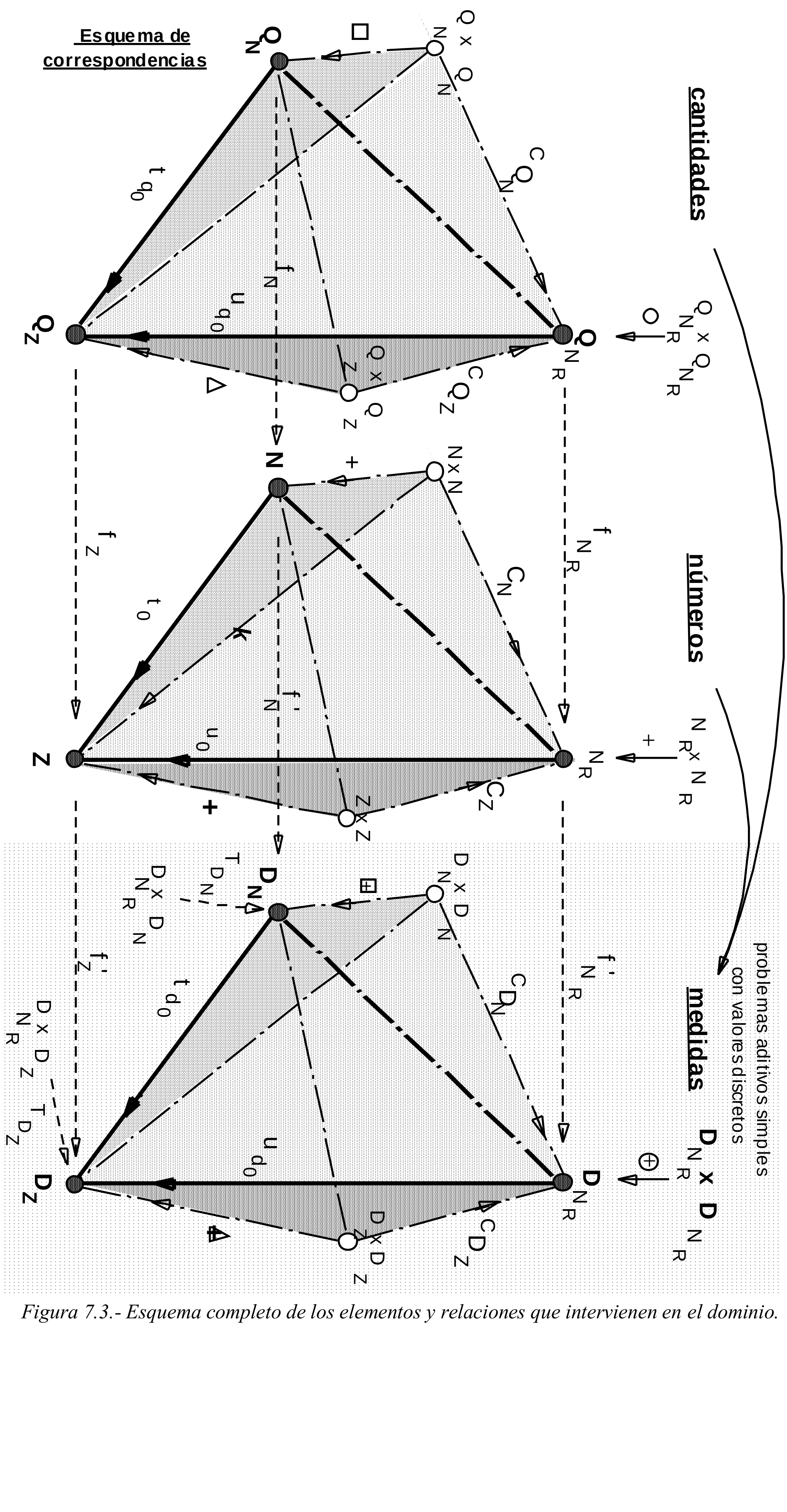


Figura 7.3.- Esquema completo de los elementos y relaciones que intervienen en el dominio.

$\mathbf{Q}_{\mathbf{N}}$ Conjunto de "cantidades naturales" ordenadas de una magnitud discreta concret

$\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$ Conjunto de "cantidades relativas" de una cualidad o magnitud discreta o discre zable determinada (se utilizan también los términos: "cantidades dirigidas" o "ad jetivadas" constituídas por una cantidad natural y una partícula dual).

$\mathbf{Q}_{\mathbf{Z}}$ Conjunto de "cantidades enteras" o cantidades de un dominio dualizado a partir de un origen o referencia central (considerado como cantidad nula).

□ Ley de composición aditiva de "cantidades naturales" que dota al conjunto de u estructura de semigrupo abeliano y ordenado.

○ Ley de composición aditiva de "cantidades relativas" (correspondencia no aplic ción.

△ Ley de composición aditiva de "cantidades enteras" que dota al conjunto de una estructura de grupo abeliano y ordenado.

c_{Q_N} Comparación de "cantidades naturales".

c_{Q_Z} Comparación de "cantidades enteras".

u_{q_0} Unificación de las cantidades naturales relativas nulas (correspondencia unívoc

t_{q_0} Traslación de la cantidad natural nula o cambio de origen (aplicación).

$\mathbf{N}$ Semigrupo aditivo y ordenado de los números naturales.

$\mathbf{Z}$ Grupo aditivo y ordenado de los números enteros

$\mathbf{N}_R$ Conjunto de los "números naturales relativos" (estructura "doble natural").

f_N f_{N_R} f_Z metrizaciones (isomorfismos).

$+$ Suma de números naturales (ley de composición interna).

$\mathbf{+}$ Suma de números enteros (ley de composición interna).

$+$ Suma de "números relativos" (anulación-compensación).

C_N Comparación de números naturales.

C_Z Comparación de números enteros.

k Aplicación natural (construcción formal de Z).

u_0 Correspondencia unívoca que unifica el orden y los dos ceros relativos.

t_0 Traslación del cero natural o cambio de origen.

f'_N f'_{N_R} f'_Z Isomorfismos entre números y medidas (grafos de las correspondientes metrizaciones).

$\mathbf{D}_N$ Conjunto de "medidas naturales" de una cualidad o magnitud discreta o discretizable determinada (conjunto de pares de cantidades y números naturales)

$\mathbf{D}_Z$ Conjunto de "medidas enteras".

$\mathbf{D}_{N_R}$ Conjunto de "medidas naturales relativas".

C_{D_N} Comparación de medidas naturales.

C_{D_Z} Comparación de medidas enteras

⊞ ⊕ △ Composiciones aditivas de medidas naturales, naturales relativas y enteras

u_{d_0} Correspondencia que unifica las dos medidas relativas nulas

t_{d_0} Cambio de origen de medidas o traslación de la medida natural nula.

T_{D_N} T_{D_Z} Transformaciones de medidas naturales y enteras

Figura 7.4.- Notación del esquema de correspondencias.

Desde un punto de vista informal, el último resultado es intuitivo y tiene un claro significado en todas las situaciones de aplicación concreta en las que aparece este tipo de medidas. No obstante, introduce una indeterminación que puede afectar al tratamiento formal y, en particular, al carácter interno de la ley de composición. Para eliminar dicha indeterminación, adoptamos el convenio, ya expresado, de tener en cuenta el orden en que se realiza la composición. Con dicho convenio, que además es lógicamente admisible, se obtiene un único cero que tendrá el signo del primer sumando. De esta forma el resultado (1) quedaría así:

= 0 (rojo) si el primer dado que se considera es el rojo

= 0 (azul) si el primer dado que se considera es el azul

7.4.5.2.- Propiedades algebraicas y ordinales.

En el ejemplo planteado anteriormente se observa que la adición hace intervenir tanto la suma como la resta de números naturales (denominada aquí como anulación-compensación para diferenciarla de la propia sustracción natural)[11]. No hemos de olvidar que lo que estamos denominando como "anulación-compensación" es una operación única, compuesta de una comparación previa (por la que se determina el orden de los valores) y de una sustracción entre números naturales (aquélla de las dos que es posible y tiene sentido entre dichos números).

Del mismo modo se constata la existencia de dos ceros, que caracterizan aquéllas composiciones de números naturales relativos de distinto signo y con valores numéricos naturales iguales. En estos casos el resultado es "ganar cero" o "perder cero", dependiendo del sentido en el que se realiza la composición. Ambos resultados se encuentran incluidos lógicamente en la frase "ganar cero y perder cero", lo que se traduce vulgarmente en decir que "ni se gana ni se pierde" (como jugada aislada) o que "se queda igual" (como aportación de la jugada aislada al saldo total del juego, que corresponde a una variable con estructura entera). Para valores numéricos diferentes de cero, tanto 0 (rojo) como 0 (azul) son elementos nulos con independencia del color, de forma que:

8 (rojo) H 0 (azul) = 8 (rojo) H 0 (rojo) = 8 (rojo)

En el primer miembro la composición se efectúa mediante la anulación-compensación, mientras que en el segundo miembro interviene la suma de números naturales. Pero ambos ceros no son elementos neutro para la operación definida, de manera cada uno de ellos actúa como elemento neutro para todos los números naturales relativos menos para el cero de signo contrario, como se puede comprobar fácilmente aplicando la definición.

Por otra parte el orden "doble natural" es un orden parcial con inversión en la "región negativa" con respecto al orden total entero, de manera que "ganar m, para m > 0, es siempre

[11] Esta diferencia es necesaria dado que la anulación-compensación lleva consigo dos partes diferenciadas: una es la sustracción natural y la otra, el sentido de dicha sustracción de manera que siempre sea posible (el mayor valor absoluto menos el menor).

ganar "más" que ganar 0" y, al mismo tiempo, "perder n, para n > 0, es siempre perder "más" que perder 0"[12]. En este contexto "perder m" y "ganar n" no son comparables con las relaciones anteriores, sino que hay que introducir una nueva relación: “ganar es mejor, o más que perder”, distinta de las relaciones iniciales, que lleva a una construcción lingüística complicada si se quiere eliminar el doble sentido[13]; la comparación, aún en valores absolutos, carece de sentido. Igualmente, la independencia de cada serie, en este orden parcial doble natural, se manifiesta claramente cuando se pretenden comparar los términos generales de la dualidad en otras situaciones: "subir no es ni mayor ni menor que bajar", "entrar no es ni mejor ni peor que salir", etc..

A modo de resúmen diremos que el conjunto de los números naturales relativos, con la adición y el orden que se han descrito, presenta las siguientes características estructurales:

Estructura ordinal: orden parcial constituido por dos subconjuntos totalmente ordenados con primer elemento (orden natural).
Estructura algebraica: semigrupo aditivo no conmutativo sin elemento neutro.

7.5.- Primera conclusión: nueva distribución del campo conceptual aditivo.

La figura 7.5, recoge esquemáticamente la situación del campo estudiado y la distribución de las partes que lo integran. La notación que se emplea para denominar cada una de las partes del esquema, es meramente auxilar y no se va a utilizar para otros fines.

El cuadro superior refleja la situación actual y el desarrollo curricular que se sigue usualmente para progresar del contexto de aplicación de la aritmética natural (subdominio A) al de aplicación de la aritmética entera (subdominio C), pasando por una zona intermedia (subdominio B) con límites no definidos con los subdominios colindantes, que se caracteriza por la intervención de medidas naturales relativas y de situaciones y problemas que se suelen resolver mediante la aritmética natural, la aritmética entera, o ambas combinadas.

El cuadro inferior del esquema representa una nueva distribución que elimina satisfactoriamente los problemas que se derivan de la distribución descrita en el cuadro superior; al mismo tiempo sugiere un proceso didáctico secuenciado que organiza de forma más clara el desarrollo curricular y el trabajo en el aula. De una manera gráfica y simple se puede decir que el cuadro superior ha estado situado “encima” del cuadro inferior, de manera que los números naturales relativos han permanecido literalmente “tapados” por los números enteros.

Las diferentes partes que integran la nueva distribución, son las siguientes:

[12] Obsérvese la inversión que se produce aquí, en relación con el orden entero entre números negativos.
[13] Perder 2 es perder 1 menos de lo que se gana al ganar 3.

A1.- Combinaciones naturales simples.

A2.- Comparaciones y transformaciones naturales simples.

A3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales simples.

B1.- Combinaciones naturales relativas simples.

B2.- Comparaciones y transformaciones naturales relativas simples.

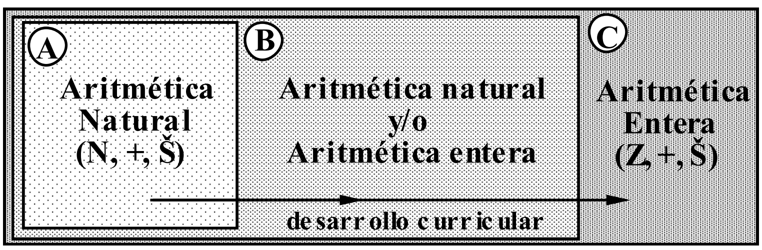
B3.- Composiciones de dos o más relaciones naturales relativas simples y composiciones de al menos una relación natural relativa simple con al menos un elemento de A2 o de A3.

C1.- Combinaciones enteras simples.

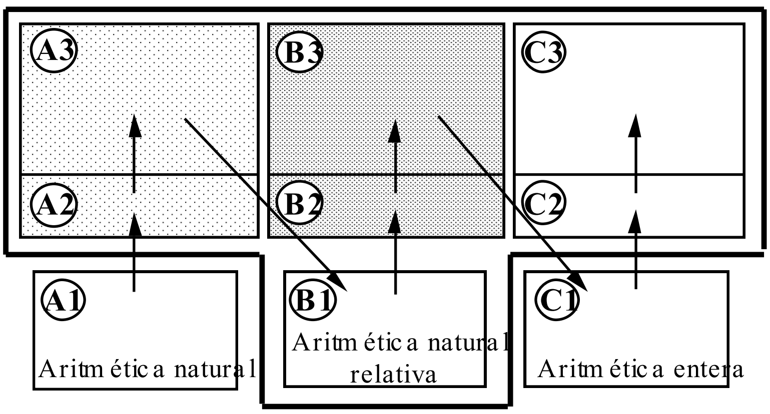
C2.- Comparaciones y transformaciones enteras simples.

C3.- Composiciones de dos o más relaciones enteras simples; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de A2 o de A3; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de B2 o de B3.

Dominios de aplicación elemental del campo numérico aditivo según el proceso didáctico usual



Dominios de aplicación elemental del campo numérico aditivo como conclusión del estudio teórico



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relat

(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

Figura 7.5.- Los dominios sobre los que se ha realizado el estudio y la modificación que se deduce del análisis didáctico.

La distribución que se ha descrito no contempla ni el problema formal de la ampliación de los conjuntos numéricos, con la consiguiente unificación de los aspectos sintácticos y semánticos, que aquí se encuentran separados, ni, como consecuencia de ello, el salto que se ha de realizar a niveles superiores para pasar a los aspectos básicos del Algebra elemental. Dichas consideraciones, así como el enfoque didáctico que se adopte, deberán surgir como consecuencia de nuevos trabajos que continúen la investigación que presentamos.

7.6.- Segunda conclusión: el campo conceptual de los números naturales relativos.

La delimitación establecida en el apartado anterior y las características generales del estudio teórico realizado permiten establecer unas referencias que sitúan los resultados en el contexto más amplio de las investigaciones sobre Pensamiento Numérico. En los apartados que siguen se exponen las principales conclusiones respecto de la situación de la investigación dentro del marco mencionado, y se introducen nuevos elementos teóricos que delimitan dicha situación con una mayor precisión.

7.6.1.- Componentes del análisis didáctico.

El análisis didáctico desarrollado durante la fase teórica se ajusta al esquema de la figura 7.6. En él se aprecian los cuatro grandes campos de análisis que hemos tenido en cuenta para abordar el problema de investigación.

ANALISIS DIDACTICO

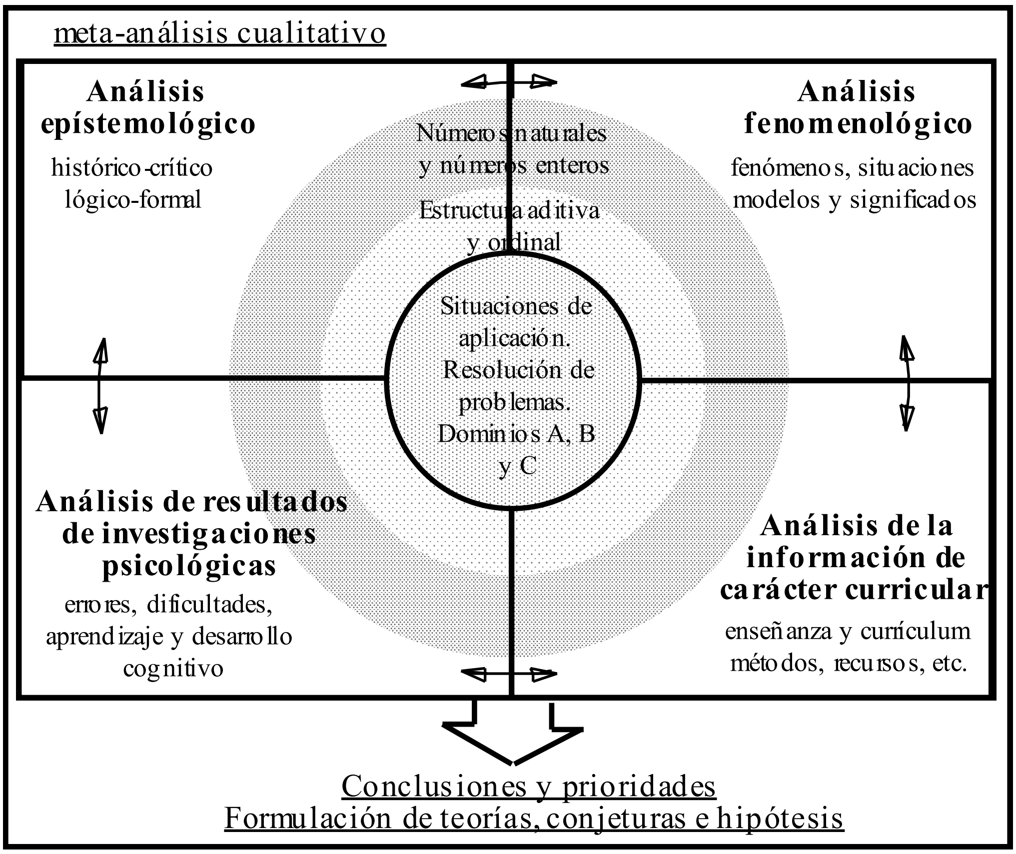


Figura 7.6.- Esquema general del análisis didáctico.

7.6.2.- Pensamiento numérico natural relativo y campo conceptual de los números naturales relativos.

El modelo presentado por Castro, E. (1994) y que se detalla en Rico, L., Castro, E. (1995, pág. 167) para estructurar la línea de investigación denominada *Pensamiento Numérico,* contempla tres elementos fundamentales:

a).- unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;

b).- unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;

c).- un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Por otra parte, dicho modelo tiene una relación muy estrecha con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1993, págs. 97 y sgtes.), para el que un campo conceptual está formado por un conjunto de situaciones y por el conjunto de los conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Las relaciones de los dos planteamientos, entre sí y con el esquema de componentes del análisis didáctico, son evidentes:

1.- La línea Pensamiento Numérico amplía las consideraciones de Vergnaud para definir el campo conceptual numérico como marco teórico de investigación. Hablar de Pensamiento Numérico es hablar, por tanto, de un campo conceptual numérico (en el sentido ampliado) con la consideración añadida de los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares involucrados en la aplicación de un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

2.- El análisis didáctico utilizado en nuestro trabajo contempla, igualmente, las componentes anteriores, aplicadas, en este caso, sobre la parte más elemental del campo conceptual aditivo. Esta metodología de análisis constituye, a nuestro entender, el núcleo de interés de la corriente Pensamiento Numérico.

En consecuencia denominamos ***campo conceptual de los números naturales relativos*** a la parte del campo conceptual aditivo constituída por:

- el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos.

- el conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del sistema simbólico de los números naturales relativos.

- el campo de actuación formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

Igualmente por ***pensamiento numérico natural relativo*** entendemos una linea de investigación en Educación Matemática interesada en el campo conceptual de los números naturales relativos y en los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares en torno al mismo.

7.6.3.- El campo conceptual de los números naturales relativos como estructura didáctica.

Admitiendo la noción de estructura como elemento primitivo y en su sentido más general, establecemos las siguientes definiciones:

Definimos como ***estructura didáctica de un campo conceptual numérico*** a la terna (L, C, F), donde L representa la estructura lógico-formal del campo numérico, C representa la estructura cognitiva asociada a dicho campo y F representa la estructura de los fenómenos y de los problemas y situaciones propios de dicho campo. L se conoce también como estructura numérica; C es un constructo, todavía poco definido, que recoge los aspectos estructurales de las actividades y funciones cognitivas específicas del dominio; F está constituído por esquemas fenomenológicos y clasificaciones de las situaciones y problemas.

La estructura didáctica del campo conceptual de los números naturales relativos, o, de manera resumida, el ***campo conceptual natural relativo*** está formado por las tres componentes anteriores particularizadas al caso de los números naturales relativos.

Del mismo modo podemos extender estas nociones al campo de los números naturales y de los números enteros. En los tres casos suprimiremos, por comodidad, el término "didáctica" para hablar simplemente de **campo conceptual natural** (**estructura natural**), **campo conceptual natural relativo** (**estructura natural relativa**) y **campo conceptual entero** (**estructura entera**).

En los capítulos siguientes se utilizan explícitamente estas definiciones: en el capítulo 8 se analizan las diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros, centrando la atención en la estructura lógico-formal y en algunos aspectos fenomenológicos; en el capítulo 9 se presta toda la atención a la estructura de los fenómenos, problemas y situaciones del campo conceptual; en el estudio empírico, que se expone en la parte IV, se ponen de manifiesto algunas diferencias en las estructuras de las actividades cognitivas del campo de los números naturales relativos y del campo de los números enteros.

7.7.- Otras conclusiones.

A las consecuencias que se exponen en el apartado 7.3.3, en relación con el análisis realizado sobre los conceptos de magnitud, cantidad y medida, así como a las que se han expuesto en los apartados anteriores, añadimos las siguientes conclusiones:

1).- En el dominio estudiado se distinguen tres tipos de cantidades, medidas y números (naturales, enteros y naturales relativos), tres leyes de composición interna aditiva (adición de números naturales, adición de números enteros y adición de números naturales relativos (combinación entre adición natural y anulación-compensación)) y tres tipos de relaciones básicas definidas a su vez por tres tipos de correspondencias diferentes y con distinto grado de implicación de las estructuras ordinales y algebraicas:

comparaciones aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia;
intervención exclusiva de la estructura ordinal;
transformaciones leyes de composición externa;
estructura ordinal y algebraica;
combinaciones leyes de composición interna;
intervención exclusiva de la estructura algebraica.

2).- Las comparaciones, transformaciones y combinaciones naturales relativas presentan similitudes en sus esquemas lógicos, si bien, las leyes de composición son diferentes.

3).- El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden que se han descrito, presenta las siguientes características estructurales:

Estructura ordinal: orden parcial constituido por dos subconjuntos totalmente ordenados con primer elemento (orden natural).

Estructura algebraica: semigrupo aditivo no conmutativo sin elemento neutro.

4).- El conjunto de los números naturales relativos regula satisfactoriamente el funcionamiento de las medidas naturales relativas, usualmente consideradas en el dominio de la aritmética natural o entera con los consiguientes problemas didácticos mencionados en el capítulo 1.

5).- El modelo construído es cerrado; es posible acceder a los números y medidas naturales relativas a través de la comparación de los números y medidas tanto naturales como enteras. Del mismo modo es posible, aunque no se ha tratado en el trabajo, que la comparación de números y medidas naturales relativas (que no se incluye en el esquema de la figura 7.1) pueda dar lugar, formalmente, a los números y medidas enteras, sustituyendo a efectos prácticos e intuitivos el proceso de unificación del orden y de los dos ceros, que es bastante más complejo. De esta manera, las nociones aritméticas y métricas enteras procederían de un doble proceso de comparación a partir de las nociones aritméticas y métricas naturales, simplificado formalmente por medio de la aplicación natural (k).

6).- Es de destacar la "superposición" de los esquemas de cantidades y números para dar lugar al esquema de la medida. Dichos esquemas se pueden disponer espacialmente, de manera que el diagrama refleje esta circunstancia.

7).- Las relaciones entre los tres tipos de números ponen de manifiesto una serie de diferencias estructurales dignas de tenerse en cuenta; en particular, el tipo de orden y el tipo de estructura algebraica que presentan los números naturales relativos y los números enteros.

8).- El modelo atiende a las relaciones simples que sirven de base a todos los problemas y situaciones del dominio, proporcionando una estructura y una terminología adecuadas para proceder a una clasificación exhaustiva que será desarrollada en el capítulo 9.

9).- Los números naturales relativos se han utilizado, sin formalizar y como útiles matemáticos, hasta finales del siglo XIX. Al aparecer la formalización de los números enteros desaparecen del trasfondo práctico en el que aportaban significados concretos a los problemas.

10).- Encontramos dos elementos clave en el proceso de construcción semiformalizada que hemos realizado: la comparación y la equivalencia que dan lugar a nuevos entes numéricos. En el trabajo que presentamos hemos invertido el orden del proceso que dió lugar a los números enteros: equivalencia - comparación. Al mismo tiempo, hemos iniciado la formalización del uso histórico previo a la construcción de Z, para poner de manifiesto que los conceptos que funcionaban antes de dicha construcción, también tienen entidad de "números".

7.8.- Logros y hallazgos.

En este capítulo se han alcanzado logros que avalan la bondad de las *hipótesis* I, II y IV enunciadas en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dichas hipótesis son las siguientes:

I.- En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

Podemos dar por comprobada esta hipótesis, dado que los resultados del procedimiento teórico ponen de manifiesto, de forma satisfactoria, la veracidad de lo que en ella se afirma.

II.- Existe un conjunto de números a los que llamamos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden adecuados, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas*.

A partir del conjunto de medidas naturales relativas con la adición y el orden que se definen, y en virtud del isomorfismo que caracteriza todo proceso de metrización, se puede asegurar la existencia del conjunto de números naturales relativos con las estructuras convenientes para que se cumplan las condiciones formales requeridas.

IV.- Los números naturales relativos abren una nueva via de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio, regulando las manipulaciones aritméticas aditivas correspondientes.

Las relaciones teóricas que se establecen entre los tres conjuntos numéricos, así como entre las cantidades, los números y las medidas, junto a la nueva distribución del dominio que se deduce de la introducción de estos nuevos conceptos, avalan la credibilidad de esta hipótesis.

La comprobación de las hipótesis señaladas, permite la consecución de los objetivos marcados. En particular, de los *objetivos* enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, se han cubierto en este capítulo, y en diferente grado, los siguientes:

a).- *Identificar, en el dominio de aplicaciones considerado, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas;* objetivo que damos por cubierto en su totalidad y de forma satisfactoria.

b).- *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio;* objetivo cubierto parcialmente en este capítulo y que se completa en los capítulos 8 y 9.

c).- *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números;* objetivo que damos por cubierto en este capítulo desde el punto de vista epístemológico. En los capítulos 8 y 9 así como en el capítulo 11 se aportan argumentos fenomenológicos y cognitivos que refuerzan la necesidad de tales números.

e).- *Construir un modelo teórico que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones y ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema;* objetivo alcanzado en este capítulo en sus aspectos fundamentales, es decir, las funciones de permitir una nueva clasificación de las situaciones o la de explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones se tratan en el capítulo 9.

De los objetivos complementarios enumerados en el apartado 2.2.3, podemos realizar las siguientes consideraciones:

Con respecto al primero de ellos, que se refiere a iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática, se han establecido en este capítulo los aspectos básicos que delimitan un nuevo campo de estudio: el campo conceptual de los números naturales relativos. No obstante será necesario tener en cuenta también los argumentos y consideraciones de los capítulos 8, 9 y 11 para tener una visión más completa del mencionado campo así como de los que se exponen en el capítulo 12 a propósito de las perspectivas futuras de la investigación, para poder realizar una valoración sobre el grado de incidencia que sobre este objetivo pueden tener los logros alcanzados en este capítulo.

En relación con los otros dos objetivos, a saber:

- Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática;

- Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática;

creemos que se han cubierto suficientemente al finalizar este capítulo, a tenor de la relevancia de los resultados obtenidos mediante la metodología que se ha puesto en práctica.

Adicionalmente, tal y como se expondrá con mayor extensión en el capítulo 12, se ha conseguido una nueva distribución del campo conceptual aditivo, la delimitación precisa del campo conceptual de los números naturales relativos y su situación como soporte conceptual y teórico dentro de la línea de investigación conocida como Pensamiento Numérico.