Capítulo 6

Segunda fase del análisis didáctico.

6.1.- Introducción.

Según se detalla en el esquema de la figura 2.4 del capítulo 2, en el que se articulan las hipótesis y estrategias metodológicas del proceso de investigación, en la primera etapa del trabajo se ha llevado a cabo un estudio de carácter general utilizando la técnica del meta-análisis cualitativo y siguiendo el proceso que hemos denominado análisis didáctico.

A partir de la recogida, organización y estudio de la información localizada se ha procedido a una revisión sistemática basada en la síntesis de los datos, resultados, opiniones y conjeturas más relevantes, y en la búsqueda de relaciones entre ellos en el marco de una reflexión teórica sobre los aspectos básicos del área problemática. De este modo se ha cubierto la fase 1 del análisis didáctico, cuyos resultados se recogen en los capítulos 3, 4 y 5.

Teniendo en cuenta los datos relevantes, conclusiones, conjeturas y prioridades establecidas para cada uno de los cuatro grandes campos a los que se ha aplicado el estudio, pasamos a desarrollar, dentro de la segunda fase, un análisis de las relaciones entre dichos campos, delimitado por un orden lógico de prioridades establecidas en los apartados 1.6 y 1.7 del capítulo 1 y condicionado tanto por la relevancia de los datos epistemológicos y cognitivos, en comparación con la de los datos fenomenológicos o curriculares, como por las conjeturas que figuran en el apartado 1.5 del capítulo 1.

Los temas que han centrado la atención de este estudio han sido los siguientes: el análisis epistemológico y fenomenológico; el análisis de errores y otros aspectos cognitivos; la representación del conocimiento matemático en juego así como la problemática de la interacción entre sistemas de representación diferentes; algunos aspectos del pensamiento numérico y, por último, el currículum sobre numeración y operaciones aritméticas en los primeros niveles educativos. Se trata de estudios que establecen un nexo de unión entre las primeras conclusiones y conjeturas y la continuación del trabajo que se expone en los capítulos restantes. Otras partes, como las que se refieren a la implementación curricular o a los obstáculos y conflictos socio-cognitivos, sólo quedan reflejadas en los mencionados antecedentes por resultar secundarias para los objetivos de la investigación.

Incluímos en el presente capítulo aquéllas conclusiones originales que complementan los antecedentes mencionados, de acuerdo con la orientación dada a la investigación; de ellas se sigue el estudio teórico que aparece en los capítulos 7, 8 y 9 de la parte III.

6.2.- Epístemología de la Matemática, Cognición, Fenomenología y Educación Matemática.

6.2.1.- El conocimiento matemático como resultado de la actividad intelectual: un intento plausible de integración de las principales posiciones y corrientes epistemológicas.

A partir de las consideraciones que se exponen en los apartados 3.3.2.B y 3.3.2.C del capítulo 3, y teniendo en cuenta las principales conclusiones que se establecen en el apartado 3.4.2 del mismo capítulo, hemos realizado una reflexión sobre las posiciones y corrientes más recientes en Epistemología de la Matemática y sus relaciones con la Cognición y la Educación Matemática. De dicho estudio se deducen unas consecuencias que constituyen principios generales de los que partimos para la realización del trabajo teórico que presentamos. Pero dichos principios no sólo conforman el marco general, sino que, además, justifican plenamente tanto el enfoque adoptado como la pertinencia del contenido y del proceso metodológico utilizado.

Sostenemos los siguientes principios generales:

a).- El conocimiento matemático es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, párcial e incompleto que tiene que ver con ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación, a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias, con una existencia ficticia o convencional que comparte dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo, como parte de la conciencia compartida.

b).- Las diferentes corrientes y posiciones epistemológicas relevantes sobre el conocimiento matemático no son más que enfoques parciales, a veces extremos, que atienden exclusiva o prioritariamente a alguno de los aspectos mencionados en el apartado anterior. Todas, sin excepción, tratan de describir una parte de la verdadera naturaleza y modo de existencia del conocimiento matemático.

c).- La creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), las características comunes del medio en el que se desenvuelven los sujetos (físicas y sociales, entre otras) y las características comunes de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

6.2.2.- Consecuencias de los principios.

1.- La intervención de los tres factores, mente, medio e interacción entre ambos, se produce, aunque quizás en distinta medida, en todas y cada una de las interpretaciones sobre la naturaleza, modo de existencia y formas de producción del conocimiento matemático. En unos casos dicha intervención es clara y directa (platonismo, intuicionismo, cuasi-empirísmo, constructivismo social), mientras que en otros (formalismo, logicismo) se produce una influencia indirecta de los mismos (todo juego de reglas es producto del pensamiento humano, el cual se configura en un medio concreto en el que se desenvuelve en constante interacción con él).

2.- El análisis epistemológico del conocimiento matemático, para ser completo, debe tener en cuenta las características comunes de los tres factores mencionados en relación con el conocimiento matemático: instrumentos y estructuras conceptuales, funciones cognitivas y formas de representación del conocimiento, entre otros; fenómenos, cuestiones y problemas que constituyen el campo de actuación, factores lingüísticos y socioculturales que afectan a la expresión y comunicación del conocimiento, entre otros; necesidades individuales, socio-culturales y científicas, y formas de utilización del conocimiento ya existente, entre otros.

3.- El análisis didáctico del conocimiento matemático debe incluir, como aspectos básicos, el análisis epístemológico (histórico-crítico y lógico-formal), el análisis cognitivo y el análisis fenomenológico, los cuales se han de complementar y relacionar con un análisis sobre la enseñanza y el currículum como aspectos específicos de la Educación Matemática; cuatro grandes campos de análisis que conforman el marco general de la investigación que presentamos.

6.3.- Epístemología y enseñanza de los números enteros.

A partir de las conjeturas previas, recogidas en los apartados 1.4 y 1.5, y como consecuencia de los antecedentes revisados sobre Historia y Epistemología de los números enteros, que se relacionan en el apartado 3.7 del capítulo 3, y de los antecedentes sobre Historia y Epistemología de la Matemática, recogidos en el apartado 3.4 del mismo capítulo, hemos elaborado los esquemas y reflexiones que figuran en los dos apartados siguientes.

Acerca de estos esquemas hemos de hacer las siguientes puntualizaciones:

- Reflejan aspectos relevantes de la situación actual del campo de investigación, al margen de las nuevas consideraciones que se deducen del trabajo que presentamos.

- Son conclusiones generales ligadas a los estudios epistemológicos previos, que ponen de manifiesto, por una parte, los desajustes debidos a una cierta inversión entre los procesos histórico y didáctico usual y, por otra, la mezcla de concepciones epistemológicas subyacentes a las determinaciones didácticas. Ambos aspectos justifican plenamente la necesidad del análisis teórico más detallado que se expone en los capítulos siguientes.

6.3.1.- El proceso histórico y el proceso didáctico usual.

En la figura 6.1 se destaca que el proceso didáctico convencional[1], que forma parte de la cultura escolar y que aún se puede observar en algunos libros de texto españoles (Ed. Anaya, 1994; Ed. Santillana, 1992, entre otros), se encuentra fuertemente condicionado por el producto final del hacer matemático; el alumno sigue un proceso de instrucción en reglas y propiedades formales, sin demasiadas justificaciones, para finalizar en las aplicaciones concretas, lo que supone, en parte, una inversión de lo que ocurrió en el desarrollo histórico.

[1]Nos referimos al modelo didáctico simbolizado por la flecha completa, o por una parte de ella, que ha dominado la enseñanza hasta hace poco tiempo. Otros modelos no siguen este desarrollo lineal, o combinan algunos de los aspectos mediante saltos en ambos sentidos. No obstante los modelos didácticos revisados hasta 1989 (González J. L. y otros 1990) se encuentran, en general, condicionados por la construcción matemática formal que toman como referencia (las reglas, los símbolos, las propiedades y relaciones se dan prácticamente por definición, a pesar de los honrosos esfuerzos de algunos textos y profesores por conducir a los alumnos a la comprensión).

Consecuencias didácticas provisionales del estudio epístemológico parcial de los números enteros

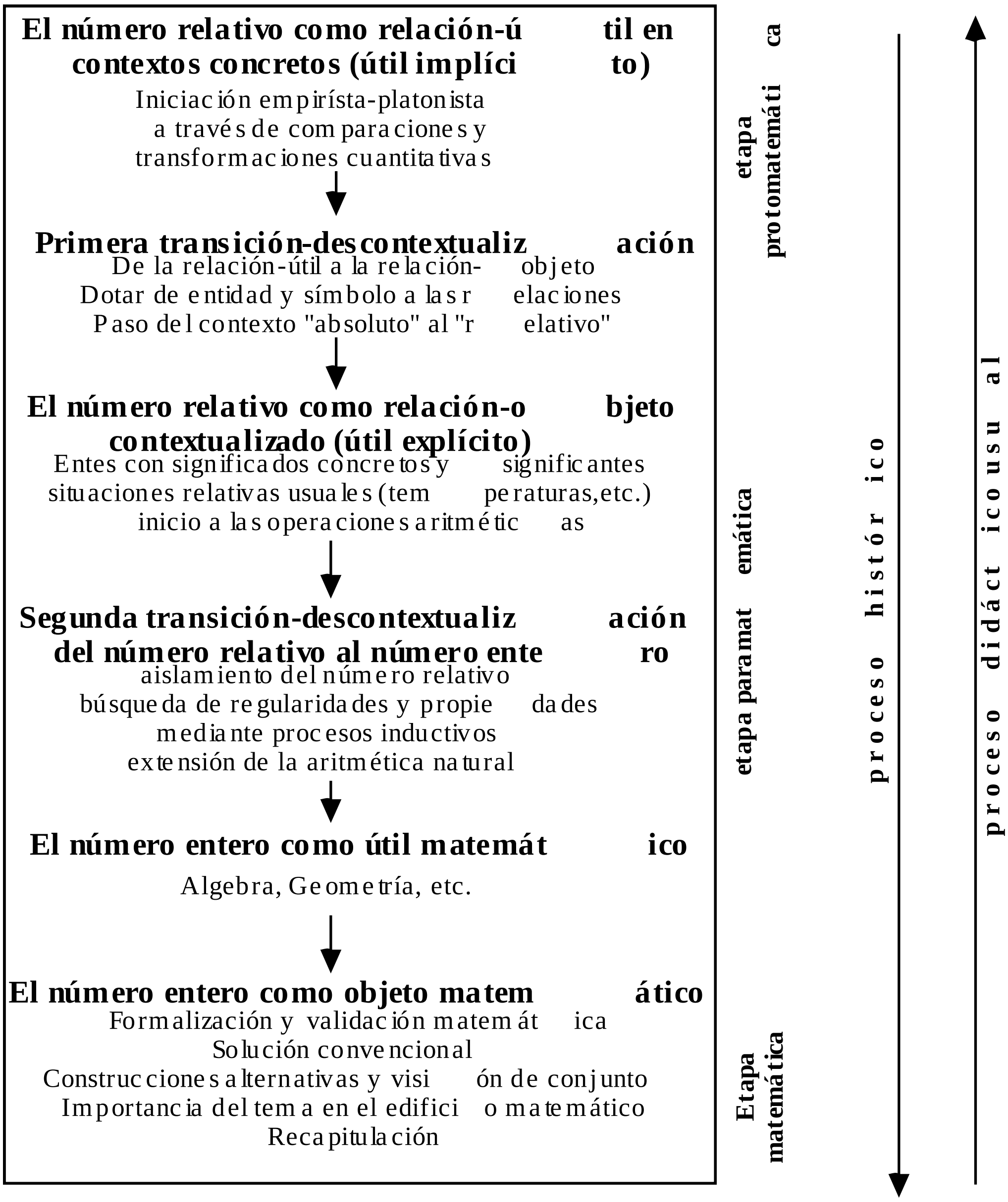

Figura 6.1.

Por otra parte, teniendo en cuenta las consideraciones establecidas en los apartados 3.7 y 3.8 del capítulo 3, se puede situar el problema central de ambos procesos en el paso del contexto concreto (situaciones y problemas de aplicación práctica) al contexto formal (segunda transición, validación e institucionalización del conocimiento), en el que se da una solución que origina ciertos desajustes entre dichos aspectos.

6.3.2.- Principales enfoques didácticos y planteamientos epistemológicos subyacentes.

La pregunta ¿de qué formas se han enseñado recientemente y se enseñan en la actualidad los números enteros y cuáles son los supuestos epistemológicos subyacentes a cada una de ellas? recibe una primera respuesta en el esquema de la figura 6.2, si bien, el proceso didáctico suele ser una mezcla de varios de dichos enfoques, condicionada o dominada, como ya hemos mencionado, por el producto matemático acabado (opción 4).

Las principales conclusiones que se pueden extraer del cuadro son las siguientes:

- Existe una estrecha dependencia entre las diferentes determinaciones didácticas y los supuestos epistemológicos correspondientes, los cuales deben tenerse en cuenta en la medida en que contribuyen a clarificar una parte del conocimiento matemático.

- El predominio de las concepciones más recientes, como es el caso del formalismo, ha provocado una ruptura importante con respecto a las anteriores, hasta el punto de olvidar el mundo de fenómenos concretos a los que, en un principio, se referían las ecuaciones y las manipulaciones algebraicas que daban cierto sentido a los números negativos. Esta incompatibilidad no proviene de las diferencias entre las posiciones epistemológicas bajo las que se analiza y explica la naturaleza y el modo de existencia del conocimiento matemático en cuestión sino de la pretensión a posteriori, y a partir de la solución formal, de reconciliar lo "viejo" con lo "nuevo". Al querer englobar bajo una única estructura, una única sintáxis y un concepto único, como es el de número entero, una serie de conceptos y relaciones no clarificadas hasta ese momento y que regulan el funcionamiento de un conjunto de fenómenos con características diferentes, se producen desajustes importantes y encontramos que algunas aplicaciones concretas no son tan evidentes ni triviales como otras.

- La diversidad de enfoques y concepciones, a veces incompatibles entre sí, dominadas por la solución formal, que funciona a la perfección en su propio ámbito y para los propósitos para los que fué elaborada, plantea, no obstante, serias dificultades en el terreno didáctico. Si elegimos los enfoques 1 y 2 no podremos llegar muy lejos; si elegimos los enfoques 3 y 4 tendríamos que ser coherentes con la concepción formalista y hacer comprender la necesidad matemática de esta solución convencional. En ambos casos se producen disfunciones y dificultades graves. Si, por el contrario, se adopta una posición mixta habrá que tener sumo cuidado a la hora de elegir las actividades, de justificar las propiedades y de conectar los aspectos concretos con los formales.

Enfoques didácticos "puros"	sustrato epistemológico
1 Por medio de la recta numérica	**- Platonismo con soporte geométrico** **- Mito de Euclides**
2 A través de situaciones concretas - utilidad en las ciencias y en la vida diaria - útil no matemático	**- Pensamiento hasta s. XVIII** **- Concepción platonista-empirista** **- Opción incompleta al no existir un modelo concreto completo para los enteros**
3 Por extensión de la aritmética natural - hacer posible la sustracción en todos los casos - cubrir las necesidades algebraicas - principio de permanencia de Hankel - extrapolación inductiva (Freudhental) - el número entero como útil matemático	**- Pensamiento s. XIX.** **- Los números enteros son una extensión formal de los naturales.** **- Los números enteros son útiles necesarios para el álgebra.** **- Concepción preformalista y prefundamentalista.** **- Atisbos de constructivismo-intuicionismo.** **- Solución convencional forzada por los hechos.**
4 Por construcción conjuntista completada con el enfoque estructuralista. - el número entero como objeto matemático aislado - no se construye rigurosamente en los niveles elementales - se utilizan situaciones concretas para ejemplificar	**- Pensamiento final s. XIX-principios s. XX.** **- Visión fundamentalista (logicismo y formalismo).** **- Se introduce además el punto de vista bourbaquista.** **- Predominio de: estructura, consistencia y rigor lógico sobre el concepto de número y su utilidad práctica.**

Figura 6.2

6.4.- Epistemología, cognición y representación del conocimiento matemático.

6.4.1.- El problema didáctico de la representación en Matemáticas.

Algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en Matemáticas están relacionadas con los procesos de **traducción** entre diferentes **representaciones** y entre la experiencia común y las ideas matemáticas. A pesar de la importancia que esta cuestión tiene en el aprendizaje matemático, y del interés creciente con el que se está abordando, no existe actualmente un cuerpo sólido y coherente de información científica sobre el tema, sino contados trabajos realizados sobre áreas muy concretas[2].

En este apartado abordaremos los procesos y las tareas de traducción-interacción entre los sistemas de representación más comunes en matemáticas, precisando términos e ideas fundamentales, centrando la atención en la representación escrita y haciendo una distinción entre dos grandes bloques de representación implicados en los números naturales relativos, como son los registros comunes y los registros matemáticos. Igualmente, expondremos las teorías y conceptos que manejamos sobre la representación en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; tambien haremos una breve revisión de algunas investigaciones acerca de la comprensión y el dominio de la sintáxis y la semántica del conocimiento matemático. La adaptación al caso particular de las situaciones relativas con estructura aditiva, completará la exposición del trabajo realizado sobre este aspecto.

6.4.2.- Representación y pensamiento: una interpretación.

El término **representación** es un término complejo y, por tanto, difícil de definir, como se pone de manifiesto en los intentos recientes (Kaput, Lesh, Behr, Post y otros en: Janvier, C., 1987) por construir un marco teórico que permita abordar el uso de diferentes sistemas simbólicos en Matemáticas. Aunque no es una cuestión central en este trabajo, dado que utilizaremos los sistemas de representación como instrumentos para obtener evidencias empíricas sobre la existencia de diferencias cognitivas, nos parece conveniente adoptar una posición que nos permita establecer las conexiones entre las características epistemológicas y las características cognitivas de los números naturales relativos. El análisis de la sintáxis y semántica asociadas a estos números completará el estudio epistemológico realizado.

El concepto de representación se puede entender desde una doble óptica: como una cierta relación entre la idea y el objeto representado, o bien, como la idea misma (Howard, R., 1987). Esta consideración refleja los dos sentidos básicos que se suelen considerar en epistemología[3]. Nuestra valoración es que esta idea, además de ser problemática, en la medida en que la representación abarca algo más que los conceptos y relaciones, no es excesivamente útil para los propósitos del trabajo, ya que parece que hay que elegir una de las dos opciones puesto que ambas se suelen utilizar por separado y de manera excluyente. Por ello adoptaremos una interpretación particular del término representación como contenido mental y, por tanto, de acuerdo, en líneas generales, con distintas acepciones que tiene el término en Psicología.

Diremos que una **representación** es **un modelo mental de carácter cognitivo que hace referencia y se sustenta en las experiencias del sujeto.** El término **experiencia** es considerado en su acepción más general y se refiere tanto a las experiencias externas, en las

[2]Ver entre otros, Janvier, C. (edit.) (1987).

[3]Ferrater Mora: Diccionario de Filosofía. Alianza Editorial S. A.. Madrid 1979; pp.2847-2848.

que el individuo interactúa con el entorno, como a las experiencias internas, por las que el sujeto reflexiona, recuerda, contrasta conocimientos o crea e introduce relaciones y conocimientos nuevos. Admitimos que ambos tipos de experiencias se encuentran relacionadas y tienen como denominador común la actividad intelectual.

Igualmente, figura 6.3, distinguiremos entre la representación y la expresión de una representación. Las representaciones son observables externamente cuando el individuo responde, actúa o expresa de algún modo su pensamiento. En este caso, hablaremos de la *expresión significante* como expresión observable de representaciones; manifestaciones externas que proporcionan información sobre las representaciones del sujeto. A su vez dichas expresiones significantes quedan materializadas en diversos soportes (escritos, gráficos, imágenes, etc.), pasando a integrar el universo de expresiones significantes susceptibles de comunicación y de ser medios para experiencias e interpretaciones por parte de otros sujetos.

Por otra parte admitiremos que toda representación involucra dos factores: un <u>contenido,</u> constituído por una información que dota de significado al conocimiento, y un <u>formato</u> que hace las veces de vehículo para su posible expresión observable.

Al optar por la idea de representación como modelo cognitivo, hemos de modificar ligeramente los términos que propone Kaput, J. (Janvier, C., 1987; cap. 14, pp. 159-195) para definir el concepto de **sistema de representación**. Según este autor un sistema de representación es una terna (S, F, c), donde S es un esquema simbólico, F es un campo de referencia y c es una correspondencia entre S y F. Según nuestros planteamientos toda representación tiene un carácter privado mientras que toda expresión tiene un carácter público. Sin embargo, para determinados tipos de conocimientos, entre ellos el lenguaje ordinario o el conocimiento científico, existe un consenso en cuanto a su expresión y comunicación, lo que puede inducir *cierta uniformidad* en las representaciones de todos los individuos. Pero esta uniformidad no debe entenderse, en nuestra opinión, ni como identidad en las interpretaciones de la misma experiencia ni como identidad entre representación y su expresión, si tenemos en cuenta el carácter singular e irrepetible de las experiencias de cada individuo.

Al diferenciar entre representación y expresión de una representación, diremos que **un sistema de representación** es una terna (S, F, c), donde S es un esquema simbólico en el mismo sentido dado por Kaput, F es un campo de referencia constituído por las relaciones, conceptos, significados y esquemas objetivos de la estructura subyacente que se pretende representar mediante el esquema simbólico, o dicho de otra forma, el conjunto de conocimientos *admitidos y compartidos* por la comunidad de especialistas o por la comunidad de uso (conjunto de significados usuales que dotan de contenido al esquema simbólico), y c es una correspondencia específica que relaciona los elementos de S y de F. De esta manera, *todo sistema de representación es un constructo controlado por la comunidad (es de dominio público), pertenece al ámbito de la conciencia compartida (tercer* *tipo de existencia del conocimiento* [4]*), y es independiente del sujeto individual,* en la medida en que incluso en el seno de la comunidad que lo emplea de forma regular puede haber diferencias individuales.

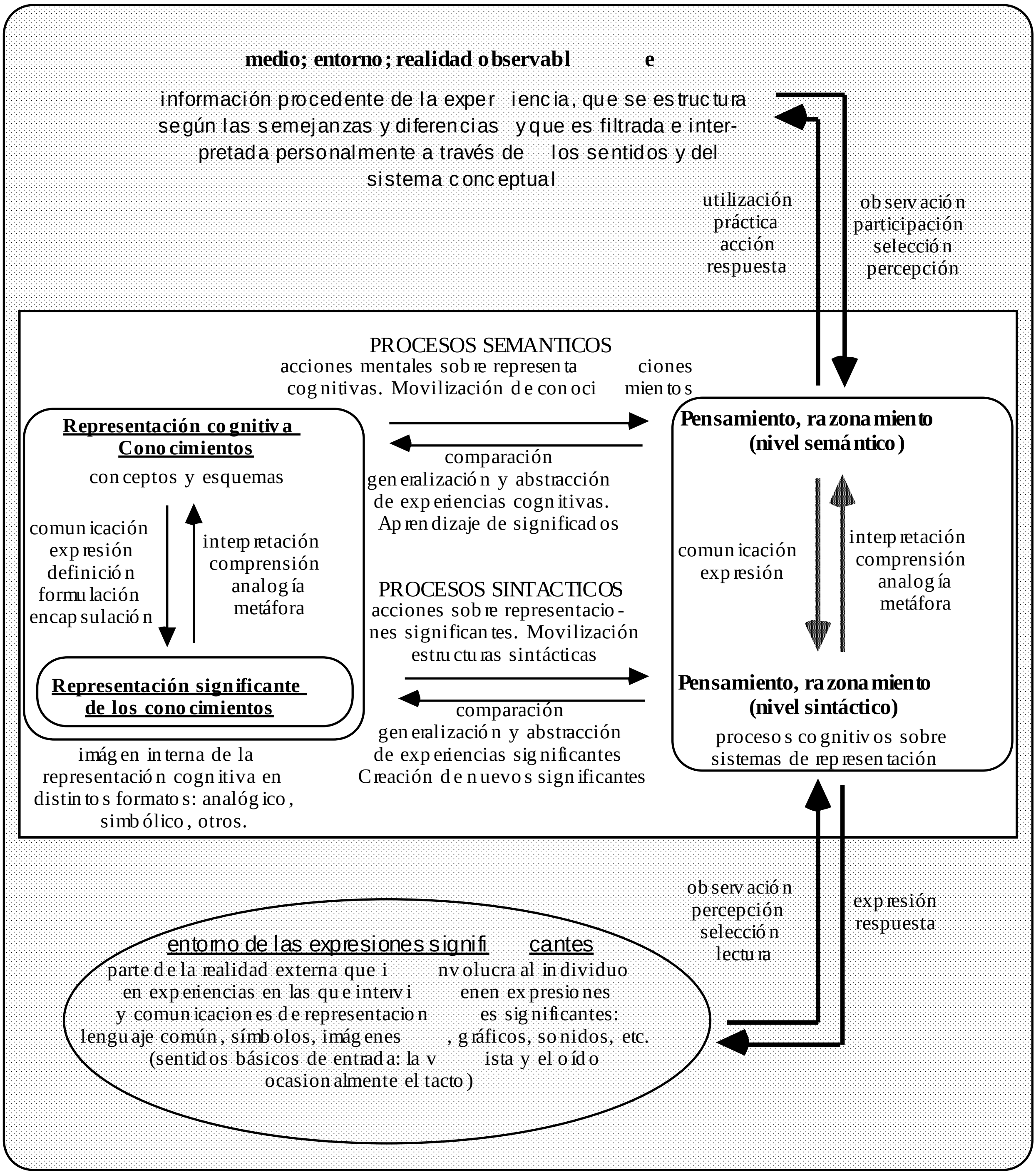

Figura 6.3.- Tipos de representación y pensamiento

---

[4]Popper, K. R. (1989); Davis, P. J.; Hersh, R. (1988).

En el ámbito educativo formal el alumno tiene experiencias con expresiones incluídas en diferentes sistemas de representación. La interpretación progresiva de dichas expresiones así como el aprendizaje de los términos y de las reglas que gobiernan su funcionamiento proporcionan al sujeto un dominio cada vez mayor en la dirección del status colectivo o público.

6.4.3.- La representación y las expresiones significantes en Matemáticas.

En lo que sigue nos vamos a referir al conocimiento matemático que manejan y han manejado los especialistas y las comunidades de profesionales. Nos referimos por tanto al conocimiento científico aceptado y comunicado.

Si adoptamos el punto de vista cuasi-empirista para la naturaleza y el proceso de construcción del conocimiento matemático (Lakatos, I, 1978; Davis, P. J., Hersch, R., 1988; Tymoczko, T., 1986), completado desde el punto de vista de su existencia con los planteamientos recientes del constructivismo social (Ernest, P., 1991), la representación del conocimiento matemático, al igual que ocurre con el lenguaje ordinario, resulta de construcciones intelectuales formadas por representaciones procedentes de experiencias matemáticas con teorías y objetos matemáticos y sus expresiones significantes, y experiencias no matemáticas, incluídas las del lenguaje ordinario. Las representaciones significantes (constituídas por la conjunción entre significados y significantes, contenidos y formatos) no se producen aisladamente, sino mediatizadas por el sistema conceptual global del individuo, influenciadas por el conjunto de representaciones cognitivas y provocadas por las propias experiencias del sujeto.

Las afirmaciones anteriores concuerdan con el trabajo en los niveles elementales o con la producción del conocimiento en matemáticas aplicadas, pero no así con otras áreas y facetas del conocimiento matemático, en las que las experiencias no matemáticas reducen notablemente su protagonismo en una parte de la producción puramente formal. Pero esto, que favorece la consideración de la Matemática como un mundo cerrado de entidades formalmente postuladas al margen de la experiencia no matemática, sucede en aquéllos aspectos en los que no existe, *aparentemente,* ninguna aportación desde fuera del sistema; en cualquier caso parece dudoso que se pueda realizar una separación tan drástica entre los diversos tipos de conocimientos y representaciones coexistentes. Si esto fuera así, ¿cómo se podría explicar la concordancia con lo real manifestada en las numerosas aplicaciones del conocimiento matemático formal a fenómenos cotidianos?.

La representación significante del conocimiento matemático parece estar constituída por modelos privados (no observables) con características parecidas e incluso coincidentes, en muchos casos, de unos individuos a otros (a veces, las expresiones significantes son interpretadas de forma diferente por distintos individuos y, a veces, provocan representaciones idénticas). Pero donde se manifiesta una mayor unidad y coincidencia es en la expresión de dichas representaciones, en la utilización de los esquemas simbólicos en base a criterios convencionales y compartidos por los matemáticos profesionales. Un cierto dominio del conocimiento matemático requiere de un cierto dominio simultáneo de varios sistemas de representación; unos son matemáticos y otros no matemáticos, como es el caso del lenguaje ordinario tanto oral como escrito.

Las expresiones significantes en Matemáticas, constituyen una combinación de **signos y símbolos** matemáticos, dispuestos a veces en forma de **tablas, diagramas y gráficos** matemáticos y acompañados en ocasiones por algunas **palabras y frases** tanto específicas del lenguaje matemático como tomadas del lenguaje común. El soporte usual para dichas expresiones es el escrito, reducido por diversos motivos (elegancia, rigor, concisión, ausencia de ambigüedad, etc.) a lo estrictamente necesario para su correcta interpretación.

6.4.4.- La representación y las expresiones significantes en Educación Matemática.

A tenor de las consideraciones expuestas en el apartado anterior y teniendo en cuenta que nuestra atención se centra en la representación escrita de información susceptible de ser considerada y estructurada matemáticamente, vamos a distinguir tres campos diferenciados que afectan al aprendizaje de las matemáticas: a).- La representación verbal común o los registros verbales comunes; b).- Las interacciones entre el lenguaje común y los registros matemáticos; c).- La representación matemática o los registros matemáticos. El campo a) constituye una parte del dominio clásico de la Lingüística, el campo c) constituye una parte del dominio de la Matemática y el campo b) es de interés especial para la Educación Matemática.

En el ámbito educativo formal el conocimiento matemático se suele presentar al alumno de los primeros niveles en un doble formato:

i).- Sintáctico-semántico, que incluye explicaciones en lenguaje común, enunciados de problemas y ejercicios en lenguaje común o en lenguaje mixto, haciendo siempre referencia a situaciones de la experiencia ordinaria fuera del aula; se trata en definitiva de combinaciones entre expresiones matemáticas y no matemáticas.

ii).- Sintáctico puro, que incluye algoritmos, procedimientos matemáticos, ejercicios de aplicación sin referencia al lenguaje común, explicaciones y definiciones matemáticas sin referencia a la experiencia, utilizando términos del lenguaje común pero específicos de las matemáticas.

Un análisis más fino de las expresiones significantes de la matemática elemental, permite establecer **tres niveles de expresión**:

1.- Elementos de primer orden: elementos básicos simples aislados que podemos clasificar en tres grandes grupos: *signos y símbolos*, *palabras y expresiones lingüísticas simples* y *dibujos y gráficos simples.*

1.1.- ***Signos y símbolos**:* matemáticos (numerales, signos de las operaciones aritméticas, signo igual, de orden, etc.) y no matemáticos (letras como variables o que designan objetos matemáticos (funciones, conjuntos numéricos, ángulos, puntos, etc.) o no matemáticos (expresiones y abreviaturas para medidas y magnitudes físicas como temperaturas, longitudes, velocidad, tiempo, o económicas (moneda, interés, porcentaje, etc.)); paréntesis y otros signos lingüísticos).

1.2.- ***Términos y expresiones lingüísticas simples:*** con significado exclusivo o prioritariamente matemático (monomio, polinomio, circunferencia, círculo, suma, resta, fracción, número, diámetro, ecuación, calcular, raíz cuadrada, par, impar, etc.), con significado tanto matemático como no matemático (significados iguales: igualdad, función, variable, gráfico, mitad, doble, triángulo, cuadrado, ángulo, etc.; significados diferentes: recta, área, potencia, cateto, corona, interior, primo, entero, anillo, grupo, diferencia, positivo, negativo, etc.) y con significado exclusivo o prioritariamente no matemático (ganar, perder, temperatura, subir, bajar; palabras que se utilizan en aplicaciones prácticas y que son accesorias al contenido matemático).

1.3.- ***Dibujos y gráficos simples***.

- matemáticos: figuras geométricas elementales (triángulo, círculo, cuadrado, cubo, pirámide, etc.); representación gráfica de: punto, recta, plano, segmento (radio de una circunferencia), altura de un triángulo, ángulos, regiones y superficies (cuadrículas y enrejados), movimientos mediante flechas (giros, traslaciones) o que indican sentido (ángulos, transformaciones sobre la recta numérica), expresión gráfica de longitudes y medidas, etc.

- no matemáticos: dibujos o fotografías de: termómetro, botonera de ascensor, instrumentos de medida, dinero, juegos conocidos, objetos o imágenes alusivas a un tema (naipes, compás, dados, etc.), material didáctico (bloques multibase, ábacos, etc.), elementos gráficos simples de planos, esquemas no convencionales en matemáticas (organigramas).

2.- Elementos de segundo orden.

Expresiones que representan relaciones complejas entre elementos básicos o de primer orden dentro del mismo sistema de representación: ecuación, fórmula, tabla, igualdades aritméticas, textos en lenguaje común, diagramas de funciones, etc.

3.- Elementos de tercer orden.

Expresiones complejas tal y como se presentan en los libros de texto o en las clases de matemáticas (combinaciones de elementos de segundo orden): problemas, demostraciones, explicaciones, ejercicios, definiciones, etc.

Una parte importante de las tareas educativas, se centran en torno a la lectura e interpretación de expresiones matemáticas, pero donde realmente culmina el dominio sobre un conocimiento matemático es en las tareas que requieren de la interacción entre varios sistemas de representación.

6.4.5.- Los procesos y las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas.

Según Janvier, C. (1.987), *"los procesos de traducción son los procesos psicológicos* *que intervienen en el paso de un modo de representación a otro"* (cap. 3, pág. 27). Matizaremos y ampliaremos a continuación esta definición para utilizarla como soporte intuitivo, considerando que, para poder hablar de proceso de traducción, se deben dar las siguientes condiciones: a) existencia de una situación matemática a traducir, b) existencia de un sujeto capaz de llevar a cabo la traducción y c) intencionalidad expresa por parte del sujeto de realizar la tarea.

Llamamos **proceso de traducción-interacción** en Educación Matemática, al conjunto de transformaciones y procesos psicológicos correspondientes que intervienen en el paso de un modo de representación a otro. De una manera más concreta, podemos decir que un proceso de traducción-interacción está constituído por todas aquéllas acciones relacionadas entre sí y convenientemente secuenciadas que debe efectuar un individuo sobre cualquier situación-problema, expresada en uno o varios sistemas de representación combinados, para ser representada o expresada bien en los mismos sistemas de representación del enunciado original (lo que supone una simple *transformación sintáctica interna* del enunciado dentro de un contexto representacional determinado), bien en otro u otros sistemas de representación diferentes (lo que supone una verdadera *traducción o transformación sintáctica externa*), manteniéndose inalterada la información del mensaje inicial o, lo que es lo mismo, el contenido semántico de la situación-problema. Esto se puede expresar de otra manera diciendo que un proceso de traducción-interacción es aquél que trata de construir y relacionar situaciones matemáticamente equivalentes entre sí. En este sentido hablamos de interacción entre expresiones diferentes de la misma situación-problema, aunque equivalentes desde el punto de vista matemático.

Llamamos **tarea de traducción-interacción** en Educación Matemática a toda actividad de enseñanza-aprendizaje de matemáticas que comporte el desarrollo de un proceso de traducción-interacción entre sistemas de representación. Consideraremos como tareas de traducción-interacción las que se presentan aisladamente en los procesos didácticos (tareas de transformación, de lectura o expresión) y las que forman parte imprescindible de los procesos de demostración o resolución de problemas. Para que una tarea de este tipo pueda realizarse, la situación-problema debe ser transformada *sin que se produzca alteración de su contenido y significados*.

Las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas son actividades que no se pueden considerar dentro de la categoría de problemas de matemáticas. Constituyen instrumentos importantes para el hacer matemático, estrechamente relacionados con el lenguaje matemático (sintáxis) y con la red de significados que dan contenido a las representaciones correspondientes (semántica).

6.4.5.1- Tipos de tareas bàsicas de traducción-interacción.

Haciendo un corte transversal entre los tres niveles de expresiones significantes en matemáticas, encontramos que una parte considerable de la representación significante se apoya en los siguientes sistemas fundamentales: **simbólico** (incluyendo fórmulas, signos y símbolos), **gráfico**, **verbal** (lenguaje común) y **tabular**, los cuales se combinan entre sí en el tercer nivel para dar lugar a expresiones complejas. Estas conclusiones concuerdan con el cuadro de la figura 6.4, extraído de los trabajos de Janvier, Kaput, Lesh y Behr (Janvier, C., 1987), que expresa las principales tareas de interacción-traducción entre sistemas de representación escrita.

Las tareas que aparecen en el mencionado cuadro representan sólo una parte del universo de tareas de traducción-interacción posibles. No obstante, este marco particular es suficiente para encuadrar los aspectos específicos que se van a tratar en función de los propósitos de la investigación, en la que vamos a emplear un tipo concreto de tarea: *la transformación-interacción sintáctico-semántica interna dentro del contexto verbal*, con la intervención de algunos símbolos numéricos. En este sentido, dejamos abierta la posibilidad de realización de futuras investigaciones en las que intervengan algunas de las restantes tareas señaladas en el cuadro.

Procesos de interacción-traducción entre sistemas simbólicos de representación escrita

a / Desde	Descripción verbal (1)	Tablas numéricas (2)	Gráficos y Diagramas (3)	Fórmulas y Símbolos (4)
Descripción verbal (1)		Medida	Croquis Diseño	Modelo
Tablas numéricas (2)	Lectura relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficos y Diagramas (3)	Lectura relaciones gráficas	Tabulación relaciones gráficas		Ajuste gráfico
Fórmulas y Símbolos (4)	Lectura símbolos y relaciones simbólicas	Cálculo y tabulación relaciones simbólicas	Croquis diseño	

Figura 6.4

6.5.- Pensamiento numérico relativo.

Pretendemos avanzar aquí un poco más en las características del Pensamiento Numérico, en la línea de establecer una estrecha relación entre representación y pensamiento, entre las manifestaciones observables del funcionamiento cognitivo y el propio funcionamiento cognitivo. Las conclusiones que se exponen constituyen la parte del análisis didáctico realizado que afecta directamente al enfoque adoptado en la investigación. Dichos planteamientos generales justifican y enmarcan la decisión adoptada en la última parte del trabajo (hipótesis VI).

Lo que aquí denominamos pensamiento numérico relativo se refiere al conocimiento en su sentido más amplio (conceptos, procedimientos, significados, destrezas, representaciones, etc.) sobre un campo de situaciones (que hemos llamado relativas[5]) caracterizadas por tres elementos[6]: cantidad/medida, origen o referencia y dos sentidos opuestos. En dicho campo, se pueden distinguir a su vez, por sus diferencias acentuadas, dos subcampos importantes (aditivo y multiplicativo) en función de las operaciones y propiedades aritméticas que intervienen. El primero de ellos gira en torno a las comparaciones y transformaciones de tipo aditivo sobre un soporte numérico natural o relativo (fundamentos del doble signo y de la estructura de orden total sin primer ni último elementos, así como del grupo aditivo de los números enteros en contextos discretos), y el segundo, atiende a las comparaciones y transformaciones de tipo multiplicativo (soporte de los números racionales).

En este trabajo dirigimos nuestra atención al primero de ellos, considerado como un subcampo importante del campo conceptual aditivo, limitando por tanto la investigación al terreno de las situaciones relativas con estructura aditiva[7]. Igualmente focalizaremos el estudio en aquéllas situaciones en las que intervienen exclusivamente valores enteros (no se tendrán en cuenta, por ejemplo, las situaciones con números decimales, fraccionarios o irracionales).

6.5.1.- Pensamiento numérico relativo aditivo y discreto.

El dominio de las tareas propias del pensamiento numérico relativo aditivo está formado por el campo de referencia que da significado a la estructura aditiva del sistema

---

[5]Se definirán con precisión en el capítulo 9. Aquí, utilizamos una aproximación intuitiva en el sentido al que se hace alusión en la nota a pié de página nº 1 de este capítulo.

[6]Consideraremos también como situaciones relativas, aquéllas en las que la cantidad no interviene como elemento relevante, como por ejemplo las de tipo lógico o de cambio de signo (engranajes y poleas, juegos de cara o cruz con monedas, etc.) en las que únicamente aparecen los dos sentidos, o las situaciones de clasificación dicotómica en torno al origen o referencia (pasarse-no llegar, negativos-positivos, más-menos, etc.), en las que intervienen únicamente dos elementos: referencia y sentidos opuestos.

[7]No es solo la estructura aditiva la que caracteriza a este tipo de situaciones. Podríamos decir que es la estructura comparativa (más general que la aditiva y fundamental como campo de referencia para el Algebra), basada en las relaciones de precedencia y de coincidencia y por tanto, la estructura de orden total sin primer ni último elementos, la que subyace en todas las situaciones del área de investigación.

simbólico de los números con signo, incluyendo los aspectos sintácticos (reglas, etc.) y representacionales (linguísticos, simbólicos, gráficos). Es decir, teniendo en cuenta las consideraciones de Vergnaud, G. y de Kaput, J. J. (1987)[8] y las conclusiones que se exponen en el apartado 6.4.2, el pensamiento numérico relativo aditivo con valores enteros presenta los siguientes aspectos:

- Un campo de referencia de las estructuras numéricas, que incluye: objetos, situaciones reales y acciones sobre ellas; significados, conceptos-imágenes y representaciones cognitivas en situaciones relativas con soporte concreto; significados linguísticos; actitudes personales, valores y normas sociales en torno a los términos relativos en la vida cotidiana, etc. Este campo de referencia se puede, a su vez, subdividir en otros dos íntimamente relacionados: **referentes reales** (mundo real; experiencias del individuo) y **referentes cognitivos, significados o concepciones** (nivel cognitivo; representaciones privadas).
- Unos esquemas simbólicos relacionados con el campo de referencia: estructura aditiva de los nùmeros naturales relativos; símbolos matemáticos y reglas sintácticas; recta numérica y coordenadas; tablas; gráficos y diagramas; lenguaje algebraico; lenguaje natural verbal y escrito; conjuntos de signos y/o símbolos y reglas de utilización. Son instrumentos para representar y comunicar ideas, sin significados concretos a menos que estén relacionados con un campo de referencia al que sirven de soportes y vehículos de representación y comunicación.
- Unas correspondencias (relaciones referentes-significantes) que relacionan entre sí los elementos de los dos puntos anteriores y se encuentran mediatizadas por las experiencias cotidianas y de tipo académico en el terreno de la aritmética y el álgebra elementales.

6.5.2.- Formas de representación de las situaciones relativas.

El cuadro de la figura 6.5. esquematiza, en un contínuo que va desde las experiencias intuitivas, cotidianas y no matemáticas, a las experiencias dentro del ámbito exclusivamente matemático, los diferentes niveles de representación así como los elementos que intervienen.

En los diferentes niveles existen elementos comunes que forman parte del conocimiento lógico-matemático subyacente (relaciones, estructuras, etc.). Asímismo, en los últimos niveles, correspondientes a la manifestación y representación externas del conocimiento, se producen mezclas y contaminaciones que pueden ser indicadores del funcionamiento real del pensamiento numérico relativo.

6.6.- Epístemología y fenomenología de la estructura aditiva de los números enteros.

Las situaciones relativas de cuantificación discreta con significado concreto y estructura aditiva son muy variadas y abarcan desde el problema más simple, y a la vez más

[8]Algunos de estos trabajos se encuentran referenciados en Janvier, C. (edit.), (1987).

general, de comparación entre dos cantidades "absolutas" o de transformación de una cantidad en otra, hasta la situación más compleja con magnitudes dirigidas. Asímismo, son numerosas las áreas de aplicación práctica de la cuantificación relativa: economía, física, demografía, deportes, etc.. Por este motivo su clasificación es difícil, a pesar de lo cual trataremos de establecer una categorización que permita comprender y manejar los fenómenos, así como diferenciar unas tareas de otras en un esquema de conjunto lo más completo posible. Esta clasificación, que supone un primer intento de estructuración, es provisional y estará sujeta a modificaciones en función de los resultados que se exponen en los capítulos siguientes, así como de los que se obtengan en trabajos posteriores.

6.6.1.- Características básicas.

Los elementos que caracterizan las situaciones y problemas del campo en estudio y que han servido de punto de partida para esta primera clasificación, son los siguientes:

Tópico fenomenológico

Los temas o tópicos susceptibles de aplicación del pensamiento numérico relativo aditivo son numerosos. Los temas más comunes y, a la vez, más interesantes son: comparación de numerosidades y posiciones; demografía y cambios poblacionales; listas y colas; clasificaciones deportivas; economía; estimación-aproximación de cantidades; estadística elemental; juegos; deportes; móviles (ascensores, desplazamientos, etc.); geometría (recta numérica, plano de coordenadas, etc.); escalas (temperaturas, cronología y otras); magnitudes físicas y modelos duales (balanza, cubos fríos y calientes, partículas cargadas, etc.).

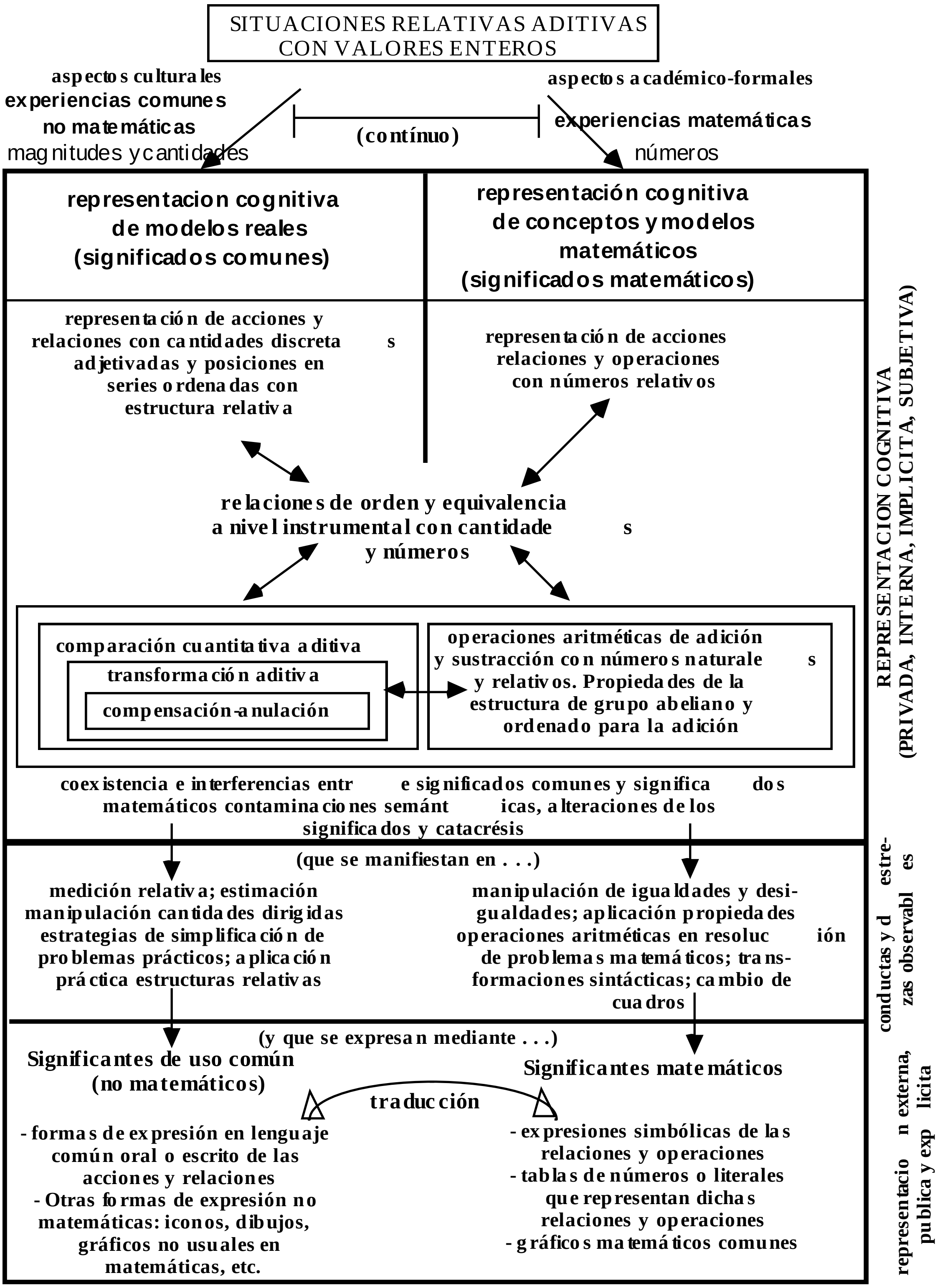

Figura 6.5- formas de representación de situaciones relativas

Por otra parte, a título de ejemplo, los fenómenos caracterizados por consideraciones ordinales y/o topológicas, aparecen en diversos ámbitos del conocimiento y de la actividad cotidiana: en Matemáticas (propiedades de figuras planas; plano de coordenadas; transformaciones en el plano y en el espacio; gradientes de líneas; funciones; estadística;

cálculo (áreas orientadas, etc.)); en Ciencias Experimentales (termodinámica; óptica; mecánica; topografía); en otras Ciencias y actividades humanas (demografía, cambios poblacionales; economía, etc.).

Soporte, referencia y relación-operación.

En todas las situaciones existen dos elementos, como son **el soporte** y **la referencia**, que presentan una serie de variantes útiles para la clasificación. El primero de ellos se refiere a las cantidades-números que intervienen como base del problema y que constituyen los objetos sobre los que se aplican las relaciones; el segundo se refiere a la cantidad-número que se toma como origen de relaciones. Las modalidades que presentan dichos elementos son las siguientes:

Para los soportes: natural cardinal (Ejemplos: demografía y cambios poblacionales; economía; balanza; etc.); natural ordinal (Ejemplos: clasificaciones; listas y colas; llegadas a meta; etc.); natural relativo (Ejemplos: medidas en la naturaleza; economía con valores relativos; medida de magnitudes vectoriales; etc.); irrelevante (Ejemplos: engranajes y poleas; juegos de cara o cruz; situaciones relativas tratadas desde un punto de vista cualitativo, etc.).

Para las referencias: natural cardinal (Ejemplos: estimación-aproximación de cantidades; saldos bancarios; bolsa, inflacción ; números índices; golf; etc.); natural ordinal (serie ordenada con primer elemento); natural relativa (Ejemplos: recta numérica; magnitudes escalares y vectoriales; errores de medición, etc); irrelevante (Ejemplos: juegos con fichas de dos colores; globo; balanza; partículas cargadas; ganancias-pérdidas, subidas-bajadas, etc.).

Las figuras 6.6 y 6.7 presentan las posibles combinaciones entre ambas categorías y los diferentes soportes, referencias y estructuras.

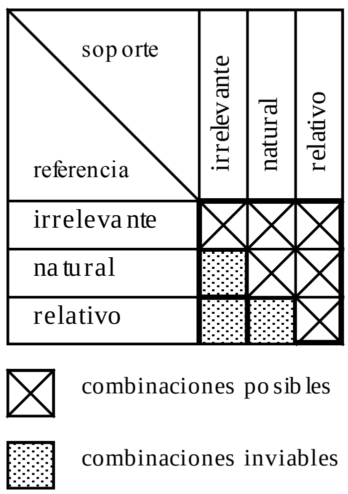

Figura 6.6.- Combinaciones de las categorías: origen o referencia y soporte.

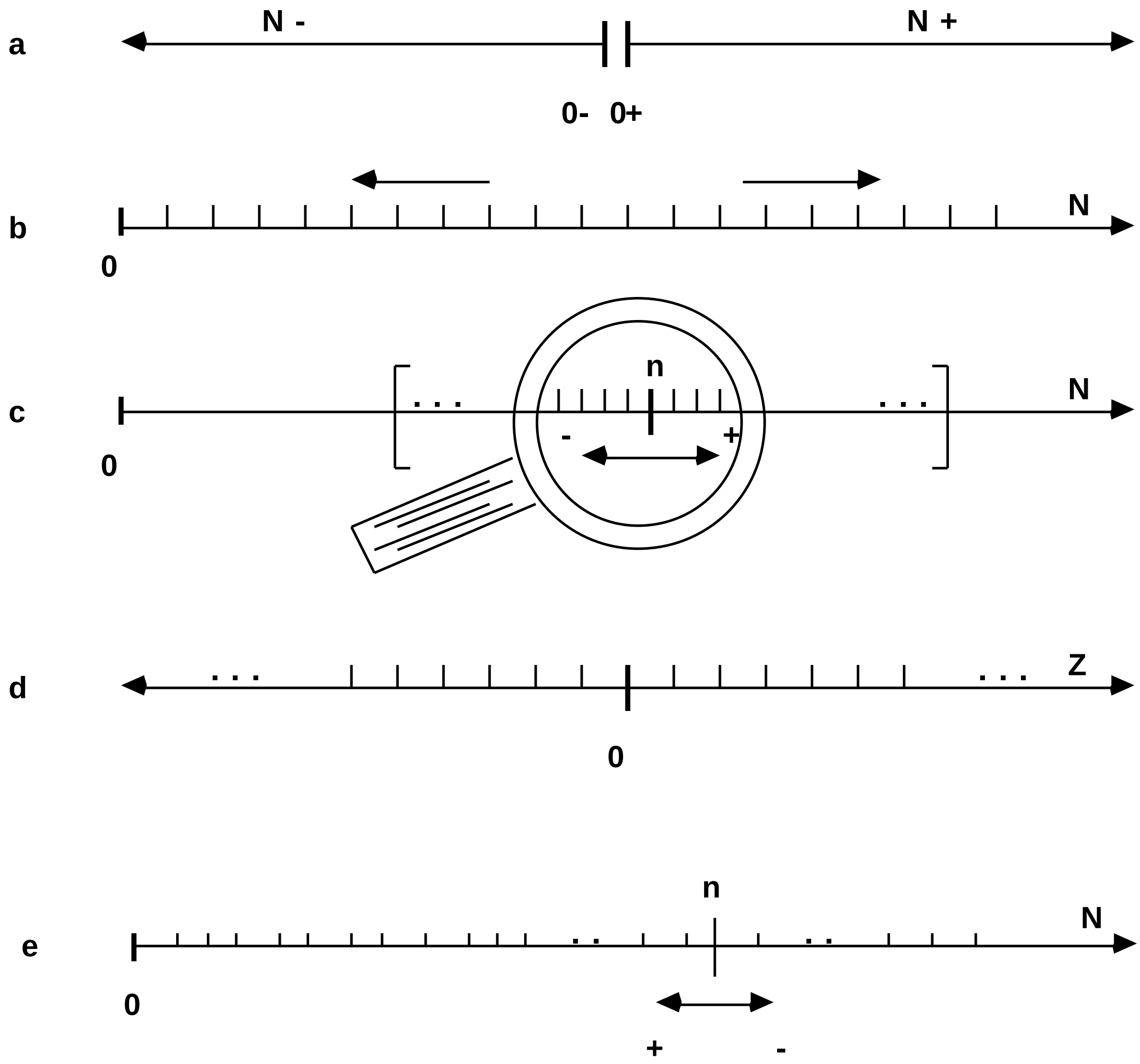

Figura 6.7.- Esquemas gráficos posibles para las situaciones relativas.

Además de las dos características mencionadas, podemos considerar un tercer elemento que influye igualmente en la clasificación de situaciones. Nos referimos al *tipo de relación-operación* existente en la situación-problema, de entre las que distinguiremos provisionalmente las siguientes: adición y sustracción; comparación aditiva; transformación aditiva; anulación-compensación; medida y sus composiciones correspondientes. Este tercer elemento, que va a constituir el factor fundamental del estudio teórico que se expone en el capítulo 7, queda, no obstante, relegado a un segundo plano en la clasificación que se va a exponer a continuación. Precisamente, la consideración prioritaria de los otros dos factores, es la que da carácter de provisionalidad e incompletitud a la misma.

6.6.2.- Tipos de situaciones.

Utilizaremos seis tipos de situaciones que van desde las más generales, en las que los aspectos "relativos" se encuentran implícitos en numerosas actividades de la vida diaria, hasta las más concretas en las que lo relativo domina perdiéndose los aspectos "absolutos" iniciales.

En lo que concierne al orden, se ha utilizado además la siguiente conjetura: "el grado de dificultad en el manejo y resolución de este tipo de situaciones, debe ir en aumento en el siguiente orden:

- situaciones basadas en la estructura natural y en las operaciones de adición y sustracción, que se corresponden con las denominadas *naturales;*
- situaciones basadas en aspectos topológicos de los números naturales y enteros (vecindad, orden topológico), que se corresponden con las denominadas*topológicas*;
- situaciones basadas en propiedades algebraicas (igualdad; opuestos; elemento neutro, simetría), que corresponden a los tipos *lógico-duales* y *prealgebraicos;*
- situaciones basadas en la estructura de orden sin primer ni último elementos y en la medida, que se corresponden con los tipos *geométrico-representacionales* y *métricos* ".

Con independencia de que esta hipótesis se someta o no a contraste empírico, se puede asegurar que la clasificación trata de recoger todas las situaciones relativas con estructura aditiva, agrupa en torno a cada tipo las que tienen una estructura similar y permite vislumbrar una cierta relación de inclusión entre los tipos si se eliminan las prioridades establecidas.

El orden de los tipos de situaciones es el siguiente:

Situaciones lógico-duales: están basadas en el significado más general del concepto de "opuestos" o "contrarios", la operación básica es la inversión dual o cambio de signo y tanto el soporte como la referencia son irrelevantes. Distinguiremos, a su vez, los siguientes tipos: de cambio de signo o duales sin referencia (engranajes y poleas; juegos de cara o cruz; circuitos de conmutadores); duales con referencia no cuantificada (situaciones relativas tratadas desde un punto de vista cualitativo; comparaciones no cuantitativas basadas en apreciaciones globales y groseras); duales con referencia cuantificada (al igual que en los anteriores no se trata de precisar un valor numérico, sino de situar cualidades diferentes a un lado o al otro de la referencia (instantes antes-después de tal momento; capacidad mayor-menor que un litro; costar más-menos de ..; etc.)). Se trata de la versión concreta y más elemental de la ley de tricotomía.

Situaciones naturales: tienen como soporte los números naturales en sus aspectos cardinal y ordinal, como referencia un número natural y las operaciones básicas son la adición y sustracción de números naturales. La estructura de orden en N, junto a las operaciones de suma y resta, proporcionan los elementos básicos para una estructura relativa implícita, que es limitada al no estar permitidos o no tener sentido los valores por debajo de cero.

Dentro de esta categoría podemos diferenciar, a su vez, dos tipos de situaciones: con soporte absoluto *(esquema b)* (comparación de numerosidades (cardinal) y de posiciones (ordinal)) y con soporte adjetivado *(esquema e)* (cardinal: transformación de cantidades absolutas con referencias naturales; economía sin crédito ni debe (tengo 100 ptas. y me regalan 500, luego me gasto..); personas que suben y bajan en medios de transporte o que entran y salen a un local, etc.; demografía y cambios poblacionales; ordinal: transformación de posiciones con referencias ordinales naturales; listas y colas; clasificaciones deportivas; etc.).

Situaciones topológicas: están caracterizadas por una referencia natural en torno a la que se construye una estructura relativa explícita y local y por la coexistencia de los números naturales y los relativos, adquiriendo estos un significado explícito directamente relacionado con la estructura natural ("distancia relativa" entre pares de números naturales); las operaciones básicas son la adición y sustracción de números naturales y números relativos.

La mayoría de las tareas propias de esta clase se distinguen por una *"concentración"* de valores o cantidades dirigidas en torno a una referencia ("valor normal") que se suele establecer con la intención de "simplificar" la situación. Igualmente consideraremos todas aquéllas situaciones que se caracterizan por el "cambio de origen" y traslación de la estructura relativa. En todas ellas, los valores "giran" en torno a la referencia establecida.

Ejemplos importantes de este tipo de situaciones son los siguientes: de cambio de origen y estructura relativa local *(esquema c)* (economía: Bolsa (referencia: índice del día anterior); Inflacción (referencia: índice de precios del mes anterior, etc.); otros números índices); de concentración *(esquema c)* (estimación-aproximación entera de cantidades y medidas; errores de medición; juegos; estadística (valores en torno a la media aritmética como origen); etc.).

Situaciones prealgebraicas: se caracterizan por la intervención de los conceptos de "igualdad" y de "opuestos aditivos", el soporte es natural adjetivado (las cantidades tienen una etiqueta o significado dual: izquierda-derecha, arriba-abajo, positivo-negativo, etc.), la referencia es irrelevante, cuando se corresponde con la situación de equilibrio o con un valor implícito que no interviene en la resolución de la situación, y las operaciones básicas son la compensación, la anulación y la adición y sustracción.

Distinguimos dos tipos de situaciones: estáticas *(esquema a)* (fichas o monedas de dos colores (Chang, Lisa); cubos fríos y calientes (Jencks, S; Peck, D.); partículas cargadas (Cotter, S.); economía sin referencias (transformaciones y composición de transformaciones) (ganancias-pérdidas, gastos-ingresos, compras-ventas, balanza de pagos, etc.); economía sobre un soporte adjetivado con referencia natural irrelevante (intercambios comerciales, saldos bancarios, déficit-superávit, etc.); comparaciones y transformaciones de carácter estático sin referencias o con referencias irrelevantes y sobre un soporte natural adjetivado); dinámicas *(esquema a)* (balanza; globo (Janvier, C.); transformaciones dinámicas sin referencias y sobre un soporte natural adjetivado (avances-retrocesos sucesivos, subidas-bajadas sucesivas, etc.).

Situaciones geométricas: la recta numérica y el sistema de coordenadas cartesianas constituyen una imágen gráfica intuitiva de la estructura relativa y sus propiedades. La linealidad, el doble sentido y el doble signo a partir del cero relativo, la medida y el orden sin primer ni último elementos, aparecen reflejados en un dibujo directamente relacionado con la experiencia real del individuo. La adición y sustracción de números relativos y las propiedades características de la estructura de orden total sin primer ni último elementos, son las operaciones y relaciones que intervienen.

Consideraremos aquí, dos tipos de situaciones con soporte y origen relativo *(esquema d):* recta numérica (transformaciones; distancias; situaciones que involucran al número relativo como estado o punto de la recta y como operador, desplazamiento dirigido o transformación sobre la recta; plano cartesiano y sistema de coordenadas (transformaciones geométricas; áreas orientadas; gráficas de funciones; etc.).

Situaciones métricas: constituyen, en su mayoría, los ejemplos más utilizados para ilustrar el tema de los números enteros. El campo de contenidos de este tipo de situaciones es muy extenso, ya que abarca a todas las magnitudes dirigidas discretas o discretizables ya sean escalares o vectoriales. La recta numérica relativa es el esquema simbólico más utilizado para su representación *(esquema d)*.

Distinguiremos dos tipos dentro de este apartado: escalas y otras magnitudes extensivas (cronología; tiempo horario; temperatura y cantidad de calor; mezclas; planisferio; medidas en la naturaleza; etc.) y magnitudes vectoriales (móviles; magnitudes físicas; etc.).

6.7.- Algunas conclusiones.

De lo expuesto a lo largo del capítulo, extraemos las siguientes conclusiones:

a).- El conocimiento matemático presenta características epístemológicas que justifican su análisis desde el punto de vista fenomenológico y cognitivo.

b).- El análisis didáctico del conocimiento matemático debe atender a cuatro grandes campos de estudio y reflexión: Epístemología, Fenomenología, Aprendizaje y desarrollo cognitivo y Enseñanza y currículum.

c).- Del proceso histórico sufrido por los números negativos y los números enteros, así como del análisis de las relaciones entre dicho proceso histórico y el proceso didáctico usual, se detectan desajustes que tienen una raíz epistemológica, es decir, son debidos a la propia naturaleza de los conocimientos así como a sus relaciones con las situaciones y fenómenos.

d).- Las tareas, situaciones y problemas propios del campo de investigación se basan en medidas y números que poseen una estrecha relación con las magnitudes y cantidades a las que se aplican; es preciso clarificar las relaciones existentes entre los conceptos de magnitud, cantidad, número y medida de cantidades.

e).- De las relaciones establecida entre la representación cognitiva y significante, o entre las experiencias y los procesos cognitivos, se deduce que, junto a las experiencias con expresiones significantes en matemáticas o en lenguaje común, la representación cognitiva, que dota de contenido semántico al pensamiento numérico, se encuentra influenciada por las experiencias sensibles con magnitudes y cantidades del mundo físico. En consecuencia, parece pertinente considerar las condiciones en que se producen las experiencias cuantitativas y métricas del sujeto en su interacción con la realidad. Conjugando las consideraciones matemáticas con las empíricas conseguiremos tener una visión más completa del problema en estudio.

f).- Con respecto a la representación del conocimiento objeto del pensamiento numérico relativo aditivo, existe una mezcla compleja de significados y expresiones significantes pertenecientes al lenguaje común y al lenguaje matemático. En particular, en el contexto verbal (en el que se sitúan los enunciados de los problemas aritméticos elementales), y en una clara interacción entre el lenguaje común y los registros matemáticos, intervienen términos y significados de uso común, asociados al campo de las medidas propias del dominio, junto a símbolos matemáticos y palabras directamente relacionadas con las operaciones aritméticas elementales. Dichos términos comunes están a su vez asociados a percepciones y acciones concretas del sujeto, las cuales pueden y deben ser definidas, sistematizadas e incluídas en el análisis.

g).- Del análisis fenomenológico realizado se comprueba la existencia de un tipo de medidas que son de uso común en una amplia gama de situaciones cotidianas y que, sin embargo, presentan características estructurales diferentes de las que poseen las medidas naturales o enteras.

Las conclusiones anteriores reafirman y dan precisión a los objetivos e hipótesis enunciados en el capítulo 2. Podemos concluir diciendo que, de las primeras conclusiones y conjeturas que se indican en el capítulo 1, de las consideraciones que se establecen en los capítulos 3, 4 y 5 así como de las relaciones establecidas entre los datos más relevantes obtenidos en la primera fase del análisis didáctico, se pone de manifiesto el carácter prioritario del análisis epistemológico sobre cualquier otra consideración. En la parte III se exponen los resultados de un estudio teórico que se ha realizado, precisamente, buscando las raíces epistemológicas del problema para clarificar los interrogantes que se detallan en el apartado 1.2 del capítulo 1.