Capítulo 1

Origen, evolución y descripción general del problema.

1.1.- Introducción.

El trabajo que presentamos se centra en la Epistemología y la Didáctica de los números enteros (fundamentos, recursos, aprendizaje y enseñanza), afectando a partes importantes del campo de investigación en Didáctica de la Matemática denominado Pensamiento Numérico.

Hablar de **Pensamiento Numérico** es hacer referencia a una *"línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social."* (Castro, E., 1994; págs. 1 - 2). Un campo amplio en el que pretendemos poner de manifiesto la existencia de una parte bien delimitada del mismo que, bajo la denominación genérica de **Pensamiento Numérico Relativo,** se caracteriza por una atención específica a la "relatividad" de los conceptos numéricos. El origen del Pensamiento Numérico Relativo se encuentra en los conceptos que surgen de la comparación de cantidades, números y medidas y se estructura formalmente a través de las relaciones de orden; se manifiesta por las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de usos de estos conceptos -comparaciones y transformaciones- y se pone en práctica en las aplicaciones de la noción de operador (Dienes, Z. P., 1972)[1] y en el tratamiento y resolución de otros fenómenos y problemas en los que intervienen medidas relativas (Rico, L. y Castro, E. 1995; pgs: 167-168).

Por otra parte adentrarse en la línea Pensamiento Numérico supone, necesariamente, tener en cuenta la noción de campo conceptual de Vergnaud (1993, págs. 97 y sgtes.), que en nuestro caso ampliamos considerando que un campo conceptual numérico incluye:

a).- unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;

b).- unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;

---

[1]El concepto de operador, probablemente es más antiguo. Sin embargo, el autor citado es uno de los que trata por primera vez dicha noción de una forma sistemática en el ámbito de la Educación Matemática (Colección V de la Editorial Teide bajo el título "estados y operadores").

c).- un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

De este modo el Pensamiento Numérico investiga los campos conceptuales numéricos, con la consideración de los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares involucrados en la aplicación de un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de dicha estructura numérica.

En este marco, el objeto general de nuestro estudio es el **Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos,** que abordamos desde una concepción multidisciplinar de la Didáctica de la Matemática, en la que destacamos la contribución de la Epistemología e Historia de la Matemática, la Cognición matemática, la Fenomenologia de los conceptos y estructuras matemáticas y la Teoría Curricular. Nos proponemos mostrar en esta memoria la pertinencia formal, contextual y cognitiva de este Campo Conceptual y su interés didáctico.

En este capítulo se va a exponer una visión general del área problemática y del tema específico de investigación, que se continuará en el capítulo 2 con la formulación concreta de los aspectos específicos que se van a investigar y se completará en los capítulos 3, 4 y 5. Esta primera aproximación pretende explicitar los planteamientos iniciales y contribuir a una descripción del origen y la evolución del problema. Utilizaremos en ocasiones algunas de las principales conclusiones y conjeturas que aparecen en González, J. L. y otros (1990), a la que nos remitiremos para una información más amplia

1.2.- El origen del problema.

El origen del problema se sitúa, en primer lugar, en la necesidad de precisar los interrogantes y deficiencias existentes en torno a la enseñanza-aprendizaje de los números enteros y de los conceptos numéricos elementales relacionados con ellos; en segundo término, en la necesidad de encontrar interpretaciones y explicaciones coherentes y útiles para la Didáctica de la Matemática a tales interrogantes y deficiencias; y, en tercer lugar, en la conveniencia de alcanzar respuestas a los problemas detectados, así como para otros interrogantes que encontramos en la Historia y la Epistemología de los números enteros *"proceso histórico sorprendente de más de quince siglos"* (Glaeser, G., 1981).

En lo que sigue exponemos, de forma esquemática, los aspectos básicos que han motivado el trabajo de investigación. La mayoría de ellos serán revisados más amplia y rigurosamente en capítulos y apartados posteriores, a los que desde ahora nos remitimos.

1.2.1.- Interrogantes didácticos.

Algunas cuestiones elementales que pueden surgir por parte del profesor o de los alumnos ante el tratamiento didáctico de los números enteros, y que han sido fuente de preocupación y debate en el ámbito de la Educación Matemática, son las siguientes:

1.- ¿Es lo mismo 2 que +2?; ¿en qué se diferencian?; ¿y 2 y -2?; ¿qué es un número negativo?

2.- ¿Porqué "menos por menos es igual a más"?

3.- ¿A qué situaciones y contextos corresponden las parejas (a, b) de números naturales?; ¿qué papel desempeñan estas situaciones en la construcción de los números enteros?

4.- ¿Porqué se define la multiplicación de pares de números naturales de la forma: (a, b) x (c, d) = (ac + bd, ad + bc)?; ¿qué significado tiene la multiplicación de pares ordenados?

5.- ¿Qué tienen que ver los signos que anteceden a los números enteros con los signos de las operaciones de adición y sustracción?; ¿significan lo mismo?, ¿son diferentes?

6.- ¿Sumar números naturales es la misma operación que sumar números enteros?

7.- ¿Porqué no tiene sentido en algunos casos sumar o multiplicar temperaturas?; ¿qué sentido tiene que si multiplico dos deudas obtenga como resultado una fortuna?

8.- ¿Porqué es tan difícil encontrar un ejemplo práctico de la multiplicación de números enteros como ley de composición interna?

9.- ¿Hay algún campo, algún modelo con significado concreto, alguna situación cotidiana y real en la que se puedan ver claramente los números enteros con todas sus propiedades?

10.- ¿Qué tienen que ver los números enteros con el Algebra?; ¿son realmente números o, por el contrario, deben ser tratados como relaciones algebraicas elementales?.

11.- ¿Porqué se sacan los números enteros del contexto algebraico en el que surgieron históricamente para ser enseñados como números, en pie de igualdad con los naturales y racionales?

12.- ¿Construcción formal?; ¿situaciones concretas de aplicación?; ¿qué aspectos habría que considerar?; ¿cómo secuenciarlos?; ¿en qué niveles?

13.- ¿Porqué cometen los alumnos errores sistemáticos en la resolución de problemas en los que intervienen los números con signo?; ¿cuál es la naturaleza y el origen de dichos errores?

14.- ¿Son correctos los ejemplos y situaciones problemáticas que se utilizan en el tratamiento didáctico usual de los números enteros?; ¿hay diferencias entre ellos?; ¿cuáles son esas diferencias?

Estas y otras cuestiones derivadas, constituyen "ideas impulsoras" para el desarrollo de la investigación. Son referencias permanentes que surgen de una preocupación netamente didáctica y que marcan desde el principio el sentido del trabajo. Pero dichos interrogantes, necesitan todavía de un análisis detallado que aporte soluciones prácticas. Como afirman Gallardo, A., Rojano, T. y Carrión, V. (1994)[2], "*. .la controversia de los números negativos se resolvió en forma definitiva en el ámbito matemático en el siglo XIX con la extensión del*

[2] "Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones". Recherches en Didactique des Mathématiques. En prensa. Pág. 3.

sistema numérico, pero continúa como problema abierto para la Didáctica ". Las cuestiones que se han suscitado anteriormente son precisamente algunos de los indicadores que aportan credibilidad a esta afirmación.

1.2.2.- Hechos observables.

En el trabajo que se desarrolla en las aulas, en los libros de texto, en los programas, en los estudios sobre rendimiento de los alumnos y en otras muchas dimensiones curriculares, se pueden observar los siguientes hechos (González, J. L. y otros, 1990):

Incoherencias y disfunciones en la enseñanza de los números naturales, los números enteros y las operaciones aritméticas elementales:

- Evitación expresa en los programas, libros de texto y en el trabajo cotidiano en el aula, de las sustracciones imposibles entre naturales.
- Atención excesiva a las operaciones aritméticas y a las estructuras algebraicas en detrimento de las estructuras ordinales y topológicas de los números, de tal manera que el orden, la comparación y la cuantificación relativa se encuentran descuidadas en el currículum.
- Predominancia de la concepción "absoluta" y "estática" de los números.
- Tratamiento didáctico como copia simplificada y vulgarizada del proceso lineal de construcción formal de los conjuntos numéricos.
- Excesiva algoritmización ante las dificultades que plantea la construcción y comprensión de los conceptos correspondientes.

Problemas didácticos específicos con los números enteros:

- Incompatibilidad en el tiempo entre la introducción por necesidades instrumentales y la justificación satisfactoria de los conceptos y procedimientos correspondientes.
- Elección del tratamiento didáctico más adecuado ante la diversidad de construcciones y vías didácticas de acceso.
- Dificultades para abordar coherentemente las relaciones entre la aritmética natural y la aritmética entera; entre la cuantificación "absoluta" y la cuantificación "relativa".
- Insuficiencia del proceso didáctico usual para abordar el paso de la aritmética al álgebra, en el sentido de contemplar adecuadamente las conexiones entre los números naturales, los números enteros y las nociones algebraicas elementales.

Dificultades y errores constatados de los alumnos.

- En la conceptualización y en el dominio de los números enteros.
- En el paso de la aritmética al álgebra.
- En la resolución de problemas en los que intervienen magnitudes dirigidas y números enteros, entre otros.

En los sucesivos capítulos, se hará una revisión detallada de algunos de estos aspectos clave del tema de investigación.

1.2.3.- Otros problemas epistemológicos y psicológicos.

Como veremos en los correspondientes capítulos, las siguientes cuestiones se encuentran abiertas a nuevos enfoques y análisis:

- El número como expresión de cantidad "absoluta" parece ser un obstáculo[3] histórico persistente. Puede ser también un obstáculo didáctico importante, responsable de la aparición de numerosos errores. En este sentido, pueden existir relaciones profundas entre las dificultades y los errores de los alumnos y los obstáculos y las rupturas epistemológicas, con lo que se podría asegurar que los errores serían consecuentes con el proceso histórico.
- Las relaciones históricas, formales y psicogenéticas entre los números, las cantidades y las medidas.
- La representación de los conocimientos sobre cantidades, números y medidas. La expresión numérica y la expresión algebraica.
- La naturaleza y existencia de los números naturales y los números enteros. La ampliación del conjunto de los números naturales y las relaciones históricas y lógico-formales entre los números naturales y los números enteros.

1.3.- Estudio previo. Primeros antecedentes

El estudio presenta dos etapas diferenciadas. La primera de ellas, en la que se presenta el tema general de la Didáctica de los números enteros, se ha caracterizado principalmente por la recogida de información, la elaboración de algunas conjeturas y el planteamiento de los primeros interrogantes de nuestro estudio. La segunda, ha consistido en establecer un orden de prioridades entre los diferentes aspectos involucrados y en la realización de un estudio sistemático sobre algunas cuestiones que hemos considerado básicas.

En el presente apartado vamos a dedicar una reflexión a la primera etapa descrita y que culminó con la publicación ya referenciada. Se trata de los antecedentes cercanos del problema de investigación, cuya inclusión resumida pretende, por un lado, explicitar la complejidad y amplitud del área problemática y del problema general de investigación y, por otro, contribuir a una mejor comprensión del proceso seguido en la investigación. Los diferentes aspectos que se exponen, para cuyo desarrollo extenso nos remitimos al capítulo 3 de González, J. L. y otros (1990), han servido de punto de partida para la formulación definitiva del problema.

1.3.1.- Esquema general y primeras conclusiones.

En el esquema de la figura 1.1 se reflejan los aspectos que se han analizado en la primera etapa así como la trayectoria seguida en el trabajo.

En dicho estudio previo ya se constata, entre otros aspectos:

a).- la existencia de numerosos interrogantes y cuestiones básicas sobre números enteros que se encuentran aún sin respuesta satisfactoria.

---

[3]Bachelard, G. (1974).

b).- la inexistencia de un marco o modelo teórico que explique de una forma adecuada y completa las dificultades y errores de los alumnos relacionados con la conceptualización y la aplicación práctica de los números enteros, con la resolución de problemas aritméticos y con el paso de los números naturales a los números enteros y de la aritmética al álgebra.

c).- La escasa incidencia en la investigación didáctica de los estudios históricos y epistemológicos sobre los números naturales y los números enteros, así como sobre los conceptos de número, cantidad y medida, lo que conlleva:

- la ausencia en muchos trabajos de investigación, de una fundamentación sólida basada en la reflexión previa sobre las consecuencias didácticas de la epistemología y la historia de los conocimientos correspondientes.
- la existencia de numerosas investigaciones simplemente descriptivas o sobre aspectos meramente sintácticos.
- la irrelevancia, superficialidad, desconexión entre partes y escasa aplicabilidad de los conocimientos generados.

d).- La influencia excesiva e incuestionada del conocimiento matemático formalizado y de la estructura y el desarrollo lógico de la disciplina en los trabajos de investigación didáctica y en el tratamiento curricular de los números enteros.

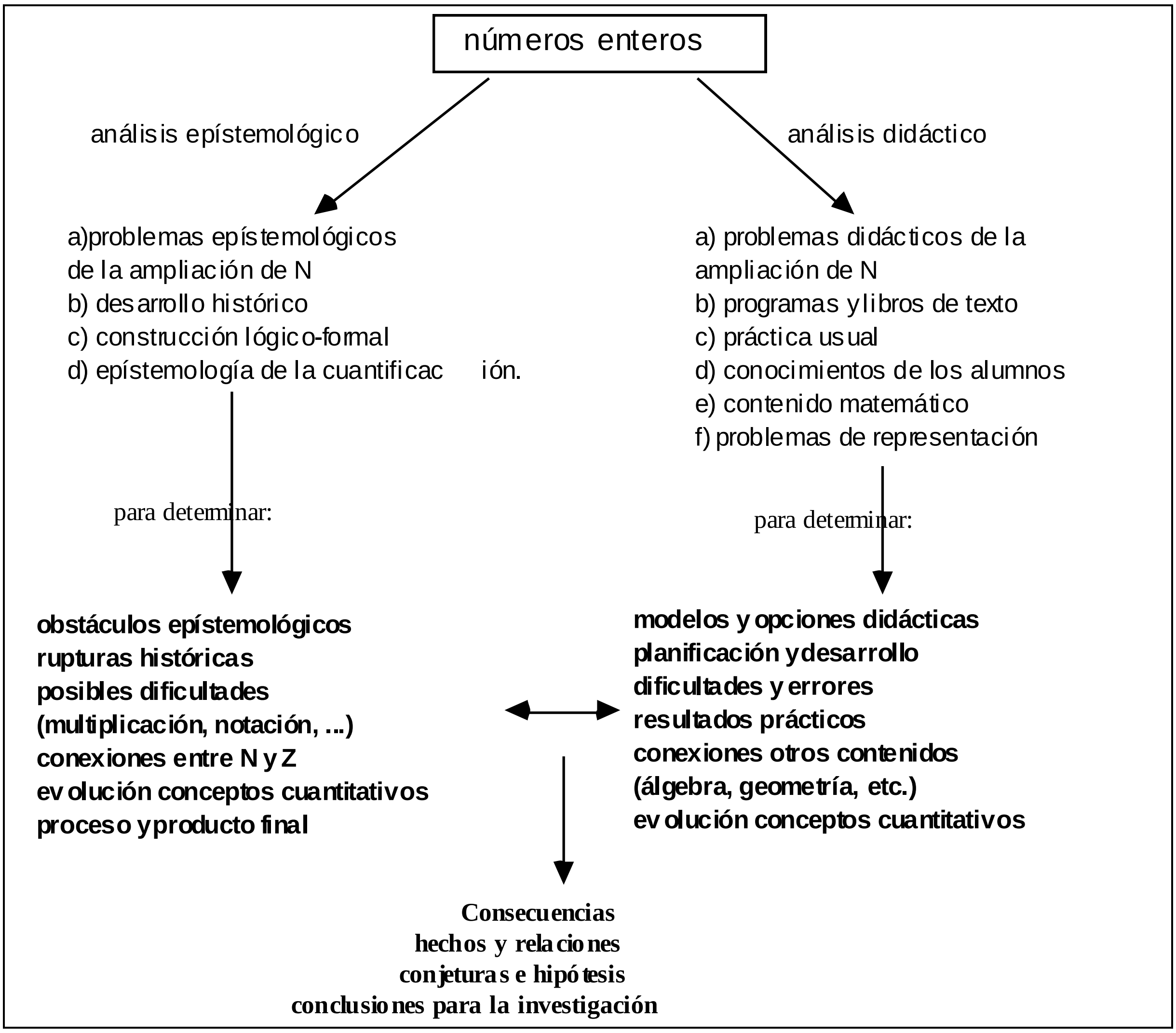

figura 1.1.- esquema general del proceso seguido.

1.3.2.- <u>Epistemología de los números enteros</u>

El estudio realizado atiende a los tres grandes métodos de la Epistemología desde la perspectiva de la Epistemología Genética (Piaget, 1979): histórico-crítico, lógico-formal y psicogenético.

1.3.2.A).- Elementos para un análisis histórico-crítico.

A.1).- Buscando en la Historia[4].

¿Cómo surgieron los números enteros?; ¿cuál ha sido la evolución a lo largo de 15 siglos de lo que hoy entendemos por número negativo?; la revisión del proceso histórico proporciona una información que refleja, por sí sola, la complejidad epístemológica del problema que estamos tratando.

Por otra parte, en el capítulo 3 se incluyen algunas consideraciones recientes, como es el caso de la "negatividad" en la Matemática China (Lizcano, E., 1993).

---

[4]Información extraída de González y otros (1990), cap. 2.

A.2).- Principales obstáculos epistemológicos que marcaron históricamente la construcción de los números negativos.

Glaeser, G. (1981) ha realizado un trabajo crucial sobre el proceso histórico de los números enteros. Encontró los seis obstáculos siguientes:

1.- Incapacidad para manipular cantidades negativas aisladas.

2.- Dificultad para dotar de significado a las cantidades negativas aisladas.

3.- Dificultad para unificar la recta numérica (que se manifiesta por ejemplo en la consideración de la recta numérica como yuxtaposición de dos semirrectas opuestas).

4.- Ambigüedad de los dos ceros (cero origen o relativo y cero absoluto).

5.- Deseo de un modelo unificado.

6.- Dificultad para superar el sentido concreto atribuído a los números.

Estos obstáculos se pueden reducir, básicamente, a uno sólo: "el número representa una cantidad en sentido *absoluto* ".

A.3).- Otras consecuencias de la historia de los números negativos.

Los análisis histórico-críticos proporcionan una parte de las piezas de información que serán examinadas en su conjunto en la investigación que presentamos: el origen algebraico de los números negativos; su carácter intuitívamente contradictorio en relación con los números naturales y el paso de la matemática práctica a la formal con motivo de la construcción de los números enteros, son algunas de las consecuencias mencionadas.

Por otra parte, utilizando la terminología de Douady, R. (1984), se ha realizado un análisis de los significados históricos atribuídos a los números enteros y de su relación con los significados que se suelen atribuir a dichos números en los procesos didácticos usuales.

1.3.2.B).- Elementos para un Análisis lógico-formal.

En los apartados que siguen, se relacionan brevemente las principales reflexiones epistemológicas realizadas.

B.1).- El proceso de cuantificación desde el punto de vista de la teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas [5].

La búsqueda de relaciones entre los conceptos y teorías matemáticas y las postulaciones de la Filosofía de la Ciencia, nos ha llevado a considerar la teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas de Stegmüller como un marco adecuado, que resulta útil para nuestro problema de investigación; en el apartado 7.3, al que nos remitimos, se encuentra un desarrollo detallado de la misma.

B.2).- Una interpretación de la construcción formal usual. La comparación y las situaciones relativas.

La construcción formal del grupo aditivo de los números enteros admite una interpretación que se concreta en términos de comparaciones cardinales u ordinales. Se trata de una interpretación que se desarrolla como una parte relevante de nuestro trabajo en el

---

[5] Stegmüller, W. (1979).

capítulo 7, apartado 7.4, al que nos remitimos.

B.3).- Diferencia de signo y relaciones asimétricas: el número entero como relación.

El planteamiento de Russell, B. (1973) sobre la diferencia de signo, en términos de la distinción entre una relación asimétrica y su recíproca, conduce a la derivación del doble signo de la propia estructura ordinal de N y a la construcciòn formal por pares ordenados.

1.3.2.C.- Elementos para un análisis psicogenético.

Piaget, J. (1975, 1979) afirma: "*las raices del número entero, se hunden en el proceso de formación de las primeras nociones numéricas, comenzando a tomar entidad a partir del momento en el que el pensamiento se hace reversible*"; planteamiento que resulta contradictorio con el que sostienen autores como Fischbein, E. (1987) y Klein, F. (1927), quiénes defienden el carácter puramente formal y no intuitivo de los números enteros; esto viene a justificar, junto a otras consideraciones, la conveniencia del estudio que presentamos.

1.3.3.- Enseñanza y aprendizaje de los números enteros.

La información contrastada y publicada que se ha utilizado en este punto, ha sido revisada de manera extensa posteriormente. En los capítulos 3, 4 y 5 presentamos una revisión más detallada y amplia de los trabajos publicados sobre el contenido de este apartado.

1.3.3.A.- Sobre los aprendizajes: algunos errores constatados.

Los siguientes errores de tipo conceptual, en su mayoría derivados de la idea fundamental "el número expresa una cantidad *absoluta*", aparecen como errores constatados en: Bell, A. (1982a, 1982b y 1986); Iriarte, D. y otros (1989) y en González, J. L. y otros (1990)[6].

- Errores en situaciones de listas y escalas: "subir es aumentar", "ignorar el signo", "signo denota región", "confundir posición y movimiento".
- Diferencias al cruzar el cero en el manejo de temperaturas.
- Inversión y palabras clave engañosas: "fracaso en la inversión".
- Errores en la combinación de movimientos.
- La secuencia temporal como fuente de errores.
- Aplicaciones indebidas de las reglas para las operaciones aritméticas con números naturales al caso de los números enteros.
- Traslado del orden natural al conjunto de los números negativos.
- Identificación de los símbolos literales con números positivos.

1.3.3.B.- Lineas generales de algunos modelos didácticos no formales que constituyen vías matemáticas de acceso a Z.

En González, J. L. y otros (1990, cap. 4) se hace una descripción detallada y extensa de las principales vías didácticas no formales de presentación de dichos números, de entre las que destacamos: el modelo aritmético inductivo experimental, el modelo algebraico, diversos

---

[6] pp. 152-165.

modelos geométricos y el modelo de las magnitudes dirigidas.

1.3.4.- Análisis Fenomenológico.

En la publicación ya referenciada (op. citada, pág. 74 y siguientes) se incluye un breve estudio sobre los significados fenomenológicos de los números naturales, naturales relativos y enteros. En la obra mencionada no se utiliza aún el término “relativo” con la precisión que se establece para este trabajo en el apartado 7.4 del capítulo 7. Asímismo, en los capítulos 4 y 5 de esta monografía se expone una revisión más amplia y detallada de los usos y contextos de aplicación de los números con signo.

1.4.- Planteamientos iniciales: conjeturas y juicios a priori.

En este apartado se exponen las principales ideas surgidas tras la primera toma de contacto con el campo en estudio, en la seguridad de que ayudará a comprender mejor la totalidad del trabajo realizado y con la intención expresa de explicitar los planteamientos y separar o aislar lo subjetivo de lo objetivo, lo opinable de lo constatado y aceptado por la comunidad.

Al comenzar formalmente los trabajos de la tesis doctoral, se manejaban ya las siguientes conjeturas:

1.- Entre los conceptos numéricos usuales de los números naturales y los números enteros, postulamos la existencia de un tercer tipo de números a los que denominamos números naturales relativos.

2.- Para abordar este nuevo tipo de números, una primera cuestión relevante es precisar la consideración "absoluta" y "relativa" de los números naturales. En nuestra opinión, *los conceptos numéricos son prioritariamente conceptos dinámicos y no estáticos,* al menos en los primeros niveles del proceso de su construcción. El número natural como expresión de cantidad "absoluta" (cardinal, medida, etc.) es una etiqueta, una propiedad de los objetos y colecciones que requiere para su comprensión de un pensamiento avanzado, de un proceso de elaboración que pasa necesariamente por unas etapas previas en las que el individuo tiene que construir relaciones cuantitativas como transformaciones en las que la comparación juega un papel fundamental. Y *es precisamente en las acciones en las que se transforman y comparan cantidades, en la propia dinámica cuantitativa, donde se consolida el sentido "absoluto" del número*, el cual tomará cuerpo cuando dichas cantidades sean consideradas cualidades transformables, susceptibles de aumentar o disminuir, comparables con otras mayores o menores que ellas, es decir, números naturales relativos. *La cantidad aislada, por sí misma, no tiene sentido si no es teniendo en cuenta su comparación o referencia con otras cantidades*. Si no se considera en el juego comparativo el carácter relativo de los números, difícilmente se podrá dotar de un significado "absoluto" a dichos números.

Por tanto, intuímos que *las nociones absoluta y relativa de cardinal y ordinal son coexistentes puesto que expresan los aspectos estático y dinámico, respectivamente, del* *número* . Por este motivo, es posible hablar en los primeros niveles, de cualidades perceptibles y comparables de los objetos y colecciones tales como: **numerosidad relativa o posición relativa** en una serie. Estas cualidades no se constituirán en cardinal y ordinal con sentido plenamente numérico hasta que no se haya construído toda una *estructura operatoria intuitiva* basada en transformaciones y comparaciones las cuales, por otra parte, son el soporte intuitivo para las estructuras aditiva y de orden de los números enteros.

Esta conjetura inicial está en el origen de una de las hipótesis fundamentales de nuestra investigación: la existencia del constructo **número natural relativo** que será presentado en el capítulo 2 y cuya estructura y desarrollo se presentarán extensamente en el capítulo 7, apartado 7.4.

3.- Los números enteros, son de naturaleza distinta a los números naturales, aunque algebraicamente y por comodidad se identifiquen parcialmente, de tal manera que la "ampliación" de N a Z es puramente algebraica.

4.- Aún cuando en multitud de ocasiones se identifican los números enteros y los números naturales relativos, nosotros vamos a distinguir entre ambos tipos de números:

número natural relativo.- objeto conceptual concreto ligado a experiencias reales con cantidades y medidas (como útil o como objeto en sí).

número entero.- objeto conceptual abstracto o ente matemático ligado al saber matemático (como útil o como objeto).

Desde el punto de vista de los significados, distinguimos entre:

- El número natural relativo o número contextualizado como: cardinal u ordinal dirigido o relativo, medida orientada, comparación numérica, operador o transformación aritmética.

- El número entero, como objeto matemático, no tiene significados concretos, abarcando por propia construcción todos los significados y situaciones con la misma estructura básica.

El salto de los números naturales relativos a los números enteros, requiere de una actividad matemática importante para dotar a los números naturales relativos de la categoría de objetos matemáticos, incardinados como tales en el resto de conocimientos de nivel matemático, con una estructura y propiedades coherentes con dichos conocimientos. La Didáctica de la Matemática debe proporcionar los medios para la evolución hacia el número entero como objeto matemático, a partir del número natural relativo como relación-útil en contextos concretos.

5.- Los ejemplos mediante los que se contextualizan los números naturales relativos, a los que denominamos **situaciones relativas**, se pueden caracterizar mediante tres elementos combinados:

- Una *cualidad comparable* o magnitud extensiva (con estados comparables entre sí). Para el caso que nos concierne, la numerosidad relativa o la posición relativa en una serie, o bien, número natural en sus distintos significados concretos.

- *Un origen o referencias,*
- *Una dirección y dos sentidos opuestos*.

Las situaciones relativas, constituyen el dominio de aplicación del **campo conceptual de las nociones numéricas relativas elementales**.

6.- *La comparación cuantitativa es una actividad básica natural del ser humano de cualquier cultura; más incluso que la actividad de contar, que es un instrumento sofisticado para precisar las comparaciones primero y para determinar cardinales y ordinales después*. En este sentido la estructura comparativa natural, que es una actividad cognitiva usual en el trabajo con números, se formaliza mediante las construcciones matemáticas por pares ordenados .

La **reversibilidad operatoria**, la **conservación** de la cantidad y el dominio de la **transitividad**, pueden ser síntomas de la buena salud de la estructura comparativa en dominios cuantitativos. Se constituyen en indicadores del dominio cognitivo de los aspectos dinámicos, operativos, relacionales de la cantidad relativa; del número relativo como relación-útil[7].

7.- Postulamos que, en situaciones concretas, los números naturales relativos negativos (que son números naturales con una cualidad arbitraria "negativa") son necesarios, fundamentalmente para poder resolver situaciones relativas complejas, a pesar de que Fischbein (1987) sostiene que: *"no existe necesidad práctica para inventar los números negativos"*. Con independencia de esto, mantenemos que las referencias reales e intuitivas son insuficientes para explicar determinados aspectos formales de los números enteros, por ello será necesario que la enseñanza de tales aspectos se haga formalmente sin utilizar justificaciones concretas inadecuadas.

8.- Los símbolos + y - se emplean, al menos, con tres significados distintos: para expresar la distinción entre enteros positivos y negativos, para distinguir entre naturales relativos positivos y negativos y para representar las operaciones aritméticas usuales de adición y sustracción en cualquiera de los conjuntos numéricos considerados, según reconocen diversos autores, entre otros, Vergnaud, G. (1983). Entendemos que existe una relación muy directa entre los significados atribuídos a dichos símbolos en los contextos considerados, y ello debido al carácter operacional del número natural relativo así como al tipo de situaciones en las que aparece (comparaciones y transformaciones), las cuales se desenvuelven en una estructura aditiva.

9.- Los significados de cantidad orientada, adjetivada ó con sentido de los números naturales relativos, se suelen proponer como ejemplos adecuados de la estructura aditiva y de orden del conjunto Z. Sostenemos que este planteamiento es inadecuado: el conjunto de los

---

[7]Terminología atribuída a Douady, R. (1984) y adaptada al caso particular en: González Marí, J. L. y otros (1990), pág. 76 y sigtes.

naturales relativos no tiene estructura de grupo para la adición, y su relación de orden, es formalmente parcial.

10.- El estudio de la estructura multiplicativa queda fuera de los objetivos de este trabajo. Por un lado, el producto de naturales relativos se ejemplifica mediante situaciones muy forzadas, o bien con situaciones en las que carece de sentido la estructura aditiva y, por otra parte, la multiplicación de números enteros sólo tiene justificación en el ámbito formal. Es un hecho que las contextualizaciones aditivas de los números naturales relativos carecen de sentido para la multiplicación.

11.- *La secuencia que se utiliza explícitamente como referencia para diseñar el currículum de numeración y cálculo en los primeros niveles y que coincide con el orden lógico de construcción matemática de los conjuntos numéricos (de N a Z), no es la más adecuada por la ausencia de un tratamiento explícito para los números naturales relativos*. En este sentido, se echa en falta un planteamiento didáctico completo y en un marco de conjunto. Este planteamiento didáctico obliga a aplazar la introducción de los números con signo a niveles avanzados del currículum cuando, por el contrario, parece que las relaciones más elementales sobre las que se sustenta el concepto de número natural relativo, se manifiestan ya en las manipulaciones cuantitativas básicas.

12.- Postulamos que los antecedentes de la estructura aditiva de Z, del doble signo en el campo numérico, de la estructura de orden total sin primer ni último elementos en dominios numerables, se encuentran en un proceso de desarrollo intelectual que pasa por las siguientes etapas previas:

a).- El número relativo como relación-útil (transformación-comparación) en contextos concretos;

b).- El número relativo como relación-objeto (objeto contextualizado);

c).- El número relativo como objeto descontextualizado (aislado): primeras aproximaciones al número entero;

correspondientes a los niveles **protomatemáticos** y **paramatemáticos** de los conceptos (Brousseau, 1986).

A dichas etapas, habría que añadir otras dos de aprendizaje y desarrollo posteriores, debidas a la instrucción escolar:

d).- El número entero como útil matemático;

e).- El número entero como objeto matemático;

correspondientes al nivel **matemático** de los conceptos.

Igualmente, habría que añadir tres descontextualizaciones o abstracciones de diferente naturaleza:

- Paso del número relativo como útil al número relativo como objeto;
- Paso del número relativo al número entero como útil matemático;
- Paso del número entero como útil matemático al número entero como objeto

matemático.

A la vista de lo anterior, parece claro, que **el tratamiento usual actual supone una alteración del proceso histórico**.

13.- Otros **errores didácticos**:

La concepción general de que *el número expresa cantidades absolutas*, ha sido un **obstáculo histórico** para el desarrollo de la Matemática. Parece que se vuelven a reproducir en el aula actual las condiciones para propiciar y consolidar a nivel didáctico el mismo obstáculo epistemológico.

En este sentido, se provoca un **obstáculo didáctico** que es corregible abordando las operaciones aritméticas desde la óptica de las transformaciones o acciones relativas con cantidades en un contexto dinámico y potenciando la estructura comparativa y, en consecuencia, el orden, la reversibilidad operatoria, las relaciones asimétricas y transitivas y la abstracción del número como relación, que llevará emparejada la abstracción del número como estado, como cantidad considerada aisladamente, como "medida" aislada.

Un segundo error consiste en utilizar la construcción formal sin un soporte que la sustente, sin un contenido al que dar sentido; una formalización hueca y construída en el vacío, con la que se pretende hacer comprender al alumno que hay que ampliar N con nuevos números (los negativos), de tal manera que ahora ya se pueden considerar iguales a 2 y +2 por ejemplo; que es normal que coexistan en el mismo conjunto, números con signo y números sin signo, puesto que éstos (los positivos) se pueden suprimir "por comodidad"; que todos cumplen una serie de reglas, unas intuitivas y otras no, aunque todas "funcionan" y que, desgraciadamente, no se pueden poner ejemplos completos válidos.

Estas conjeturas suponen una primera aproximación al problema de investigación que se precisa en el apartado 1.8 y se detalla tanto en los objetivos del trabajo, apartado 2.2, como en los enunciados de las hipótesis, apartado 2.3.

1.5.- Necesidades y prioridades. Primeras claves de la investigación.

Tal y como se recoge en los apartados anteriores, el estudio previo realizado abarca dos aspectos generales:

1º.- Análisis de las raíces epistemológicas para:

- a).- focalizar el problema.
- b).- clarificar la naturaleza de los conocimientos implicados.
- c).- establecer prioridades.

2º.- Análisis didáctico para:

- a).- contextualizar el problema.
- b).- preparar posibles estudios empíricos o experimentales.

Pero la diversidad de los campos implicados, la complejidad y la interrelación de las conjeturas inicialmente formuladas así como la amplitud de las cuestiones que, como consecuencia, demandan una investigación en profundidad, requieren de un proceso de organización de la información y, en general, de todo el campo de estudio. En particular, nos planteamos las siguientes cuestiones:

1º problema: prioridades (*¿Por donde comenzar?*).

- Conocimientos, destrezas, actitudes, concepciones de los alumnos sobre los números enteros y situaciones relativas de cuantificación.

- Errores y obstáculos en el aprendizaje de los números enteros.

- Epistemología de los números enteros y sus consecuencias para la Didáctica.

- Pensamiento numérico relativo: psicogénesis (¿antes códigos relativos que absolutos?); incidencia en los inicios de la cuantificación; papel del número natural; estructura comparativa; uso cognitivo de las funciones relativas del número; influencias socioculturales, didácticas y otras.

2º problema: relevancia (*¿Que aspectos son importantes para el área?*).

Detectamos los siguientes: clarificación de las relaciones epístemológicas entre los conceptos numéricos y los conceptos que aparecen en las situaciones concretas de aplicación; errores y causas como intrumentos de diagnóstico didáctico y cognitivo; características del pensamiento numérico relativo.

En el marco de las conclusiones y conjeturas que se han expuesto en los apartados anteriores, y después de dedicar una especial atención al análisis de los errores y al problema de la "traducción" entre diferentes sistemas de representación, **detectamos la necesidad de una clarificación previa sobre la naturaleza de los conceptos implicados**; en concreto **de establecer el campo conceptual de los números naturales relativos**. Dedicamos los apartados siguientes a desarrollar esta idea.

1.6.- Organización y descripción del Area problemática.

Nuestra preocupación no está limitada a un tópico puntual, sino que abarca toda una serie de problemas interrelacionados que requieren de una cierta organización.

Una de las tareas más importantes llevadas a cabo en la segunda etapa de la investigación ha sido la de organizar el campo en estudio y delimitar con precisión el tema específico sobre el que se iba a centrar el interés del trabajo. En este sentido se exponen a continuación, de manera organizada, los principales resultados y conclusiones de este proceso.

1.6.1.- Relación con la investigación en Educación Matemática.

El tema que nos ocupa, se puede situar en una parte de la investigación en Didáctica de la Matemática interesada en el Pensamiento Numérico en los niveles elementales. Bajo este epígrafe general se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas podemos destacar, en primer lugar, la que atiende a los aspectos psicológicos de la

Educación Matemática y especialmente a los **aprendizajes** en matemáticas; en particular a los aprendizajes sobre la numeración y el cálculo, abarcando entre otras cuestiones:

- la naturaleza, las características y la evolución de dichos aprendizajes;
- los errores y las dificultades en los procesos de aprendizaje;
- los procesos individuales de constitución de los conocimientos, así como las semejanzas y diferencias entre individuos diferentes;
- las representaciones cognitivas y significantes de los conocimientos correspondientes;
- las relaciones entre las experiencias y la formación de los conceptos;
- la adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.

Por otra parte, encontramos un campo con entidad propia centrado en la **enseñanza** de la matemática en general, y en particular, en la enseñanza de los conocimientos numéricos, es decir:

- naturaleza, características, relaciones, estructura y organización de los elementos que integran el currículum escolar sobre numeración y cálculo (objetivos, contenidos, metodología, recursos, relaciones de comunicación, evaluación, etc.), en presencia de factores y condiciones complejas propias de toda actividad humana (socioculturales, económicos, medio-ambientales, etc.);
- políticas educativas y proyectos curriculares;
- formación científico-didáctica del Profesor de matemáticas y en particular para la enseñanza de la numeración y el cálculo y otros conceptos numéricos.

Y, en tercer lugar, una parte más ligada a la práctica, basada en los procesos de **enseñanza-aprendizaje** propios del hecho educativo real, en los que interactúan diversos factores de los dos apartados anteriores, es decir:

- métodos y técnicas para provocar aprendizajes óptimos sobre numeración y cálculo;
- recursos y medios necesarios para ello;
- adecuación de los diseños curriculares sobre numeración y cálculo a los intereses, capacidades y necesidades de los alumnos así como a las necesidades científicas, socioculturales, a las diferencias individuales.

A pesar de esta separación, que se observa en el mayor peso dado a la faceta psicológica o pedagógica de la Educación Matemática, lo cierto es que se constata la necesidad de la integración de dichos aspectos en un todo coherente y específico de la Didáctica de la Matemática. En este sentido, el "análisis didáctico" en su significado usual, sujeto a determinadas modificaciones que se exponen en el capítulo 2, puede constituír el instrumento que cohesione los diversos factores que intervienen en los fenómenos educativos y que dé respuestas específicas a las necesidades de la investigación en este campo.

Pero el análisis didáctico no debe agotarse en la integración de los diversos aspectos relacionados anteriormente como una simple adición de datos obtenidos desde estos diferentes enfoques. Por el contrario requiere de una elaboración compleja, en la que se han de relacionar entre sí las distintas informaciones procedentes de dichos enfoques a partir, como veremos, de otros elementos básicos y con unas ciertas prioridades marcadas por la necesidad de efectividad científica. Así, no es difícil constatar, por ejemplo, la dependencia que tienen los tres campos relacionados respecto de la Matemática, su Epistemología y su Historia, o de otros aspectos como es el caso de la Epistemología de las Ciencias, que aporta en este tema concreto una información valiosa sobre la formación de los conceptos científicos.

Los análisis epistemológicos de la matemática en el campo educativo deben tener una orientación marcadamente didáctica (el interés primordial no debe estar en conocer la matemática en profundidad sino en obtener información útil y relevante para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Para ello, los estudios epistemológicos se deben hacer pensando en el alumno; su pensamiento, sus necesidades y capacidades; en el aula; en las actividades usuales; en los métodos y técnicas que se utilizan cotidianamente, etc.). Y es conjugando la información obtenida bajo este enfoque peculiar y específico, con los planteamientos actuales sobre la naturaleza y existencia de los objetos y teorías matemáticas y de aquéllos aspectos de las Ciencias Experimentales que se encuentran en estrecha relación con los contenidos matemáticos considerados, así como sobre otros factores que afectan al hecho educativo real, como se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia única: el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación, no sólo con miras a la simple transmisión del conocimiento matemático, sino lo que es más importante, para que sea posible el perfeccionamiento del conocimiento existente y sobre todo, la creación de nuevos conocimientos.

Desde este punto de vista, la Psicología de la Educación Matemática, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos por parte del sujeto individual, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares que conforman los procesos educativos.

Por otra parte, la Educación Matemática en su vertiente pedagógica, presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas, culturales y económicas, que vienen a mejorar y completar los diseños y desarrollos curriculares. No hay más que recordar, por ejemplo, que todos los elementos curriculares deben depender básicamente de consideraciones psicológicas acerca del individuo que se pretende educar y epistemológicas acerca de los conocimientos que van a constituir el contenido de dicha educación (Gimeno, J.; Pérez, A., 1983).

1.6.2.- Elementos concretos que delimitan el área problemática.

A tenor de las consideraciones realizadas en el apartado anterior, el trabajo de investigación se centra en torno a tres campos generales:

a).- *Epistemología y Didáctica de la Matemática* y en particular de la numeración y el cálculo, con especial incidencia en las estructuras aditiva, ordinal y topológica de los números naturales y los números enteros.

b).- *Desarrollo cognitivo de conceptos y destrezas básicas en Matemáticas* con especial incidencia en el campo del "pensamiento numérico relativo aditivo" como parte del campo de investigación más general conocido como "Pensamiento Numérico".

c).- *Currículum de Matemáticas* con especial incidencia en el bloque de numeración y operaciones aritméticas elementales y, en particular, con la clasificación de los problemas aditivos en los que intervienen los números relativos y su resolución.

Se pretende establecer por tanto unos principios fundamentales de los que se puedan extraer conclusiones válidas para el diseño curricular y el desarrollo práctico en el aula. No obstante, no se pondrá especial énfasis en esta última tarea, ya que, deberán ser los responsables de la política educativa y las personas interesadas en la práctica, las que manejando entre otras cosas los resultados y conclusiones de este trabajo y, a tenor de los múltiples factores que intervienen en el diseño curricular, opten por una u otra formas de concrección de las cuestiones en estudio.

1.7.- Descripción general y racionalidad del problema de investigación

El tratamiento didáctico de los números enteros se realiza actualmente bajo uno de los siguientes enfoques (González, J. L. y otros, 1990):

a.- Mediante situaciones relativas y modelos concretos en tareas prácticas (campo de referencia o de aplicación concreta de los números enteros).

b.- A través de consideraciones puramente formales (extensión de la aritmética, construcción mediante pares ordenados, construcción axiomática).

c.- Mediante el desarrollo de un proceso mixto, mezcla de los dos anteriores, en el que se parte de situaciones concretas y ejemplos prácticos para llegar posteriormente al tratamiento matemático.

Con la opción **a** sólo se atiende a la utilidad práctica de los números enteros, sin ningún intento de construcción o estructuración matemática. Con la opción **b**, se pone el énfasis en los aspectos puramente formales con un descuido notable de los significados y referencias que dan sentido y contenido a los aspectos fundamentales del tema. La opción **c**, en la que se sintetizan aspectos de la **a** y la **b**, convenientemente secuenciados, constituye el modelo didáctico más extendido. En este sentido, una educación orientada al pensamiento numérico relativo concreto, en la que se atienda especialmente y en primer lugar al campo de los números naturales relativos, para pasar después a la simbolización, generalización y construcción matemática formal de los números enteros sobre un cúmulo de significados y experiencias sólidamente construídas, parece el proceso deseable.

Pero la realidad es bien distinta: en cualquier opción, se da un salto cualitativo sin el soporte necesario, pues los alumnos pasan rápidamente al enfoque **b** sin un dominio completo del anterior, sobre el que cometen errores sistemáticos que trasladan a temas posteriores en el currículum como, por ejemplo, en la iniciación al Algebra.

Dichos errores, relacionados con la conceptualización y la aplicación práctica de los números enteros, con el paso de la aritmética al álgebra y con la resolución de problemas aritméticos (Vergnaud, G.y Durand, C., 1976; Hart, K., 1981; Bell, A., 1982, 1986; Conne, F., 1985), pueden ser debidos a un tratamiento didáctico inadecuado, concebido al margen de los conocimientos existentes sobre desarrollo cognitivo y evolución de los conceptos numéricos, respondiendo a criterios que atienden fundamentalmente al conocimiento matemático formalizado y, en particular, a la estructura y al desarrollo lógico de la disciplina. En tal sentido nos preguntamos: ¿porqué se actúa de esta manera?; ¿es esta la única forma posible de "enseñar-ayudar a aprender" estos conocimientos?; ¿acaso se encuentra ya en el producto matemático acabado, toda la información relevante para un tratamiento didáctico correcto y completo de los conocimientos implicados?.

En una primera aproximación avanzamos, como principal motivo de esta situación, *los desajustes existentes entre las estructuras aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros y las características de las situaciones y problemas a los que se aplican*. Por decirlo de otro modo, *la necesidad didáctica de dotar de significado y de contenido concreto a los números en los niveles educativos elementales, puede conducir a un panorama confuso en el que se mezclan indiscriminadamente conceptos, conjuntos y relaciones de diferente naturaleza bajo el control de las construcciones matemáticas formales*.

El proceso de abstracción y generalización matemática[8], no parece que suponga una ayuda para la necesaria clarificación de los contenidos educativos con vistas a su tratamiento didáctico. Es más, pretendemos poner de manifiesto en este trabajo, que el deseo de generalidad y rigor en el quehacer matemático, al resultar prematuro, se contrapone con el deseo de búsqueda de la comprensión individual de los conocimientos que debe caracterizar la labor didáctica. Resulta necesario recorrer en sentido inverso el camino usual de la formalización y abstracción matemática, para encontrar los elementos que se han perdido en su transcurso y que resultan imprescindibles para un tratamiento didáctico adecuado.

Desde esta perspectiva general, nuestro análisis didáctico concreto pretende clarificar y construir el soporte sobre el que se puedan sustentar otras consideraciones y, por tanto, atiende fundamentalmente a los elementos primitivos y básicos de los fenómenos educativos en estudio, que son:

a).- Clarificación de la Historia y Epistemología de los números enteros y de las relaciones entre estos y los números naturales. Un estudio que, como ya hemos mencionado,

---

[8]Recordemos el "Principio de permanencia de las leyes formales" de Hankel y la construcción formal de Z por pares ordenados.

no tiene por objetivo fundamentar la formalización de las construcciones de N y de Z ni explicar su génesis y evolución histórica, sino encontrar aportaciones teóricas, desde la Historia y la Epistemología, con las que construir un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de tales conceptos.

Los análisis histórico-críticos, lógico-formales y psicogenéticos, aportan informaciones sustanciales sobre las relaciones existentes entre N y Z, y llevan a considerar la importancia de las magnitudes y cantidades discretas, así como de la comparación entre ellas y de las relaciones intuitivas entre las cantidades y los números, en la formación y evolución de los conceptos correspondientes. Esto nos lleva a analizar la epistemología de la cuantificación y, en particular, la formación de los conceptos métricos así como las semejanzas y diferencias entre los tratamientos matemático y experimental de estas cuestiones. Análisis que, lógicamente, se complementa mediante consideraciones generales de carácter cognitivo y teniendo presentes experiencias concretas y cotidianas con cantidades y medidas, que vamos a denominar "situaciones relativas discretas con estructura aditiva".

b).- Como reflexión importante, cabe destacar la confusión existente entre los conceptos de cantidad, número y medida, que a veces se utilizan indiscriminadamente. Puesto que dichos conceptos son importantes en nuestro estudio, hemos creído conveniente dedicar un espacio a su clarificación cuidadosa y a una descripción detallada de las nociones que los constituyen.

Conjugando la visión científico-experimental acerca de los procesos de metrización de cantidades, con consideraciones filosóficas sobre la Aritmética y los conceptos de cantidad, número y medida, junto a la visión matemática y epistemológica sobre los números naturales y los números enteros llegamos, por un lado, a la necesidad de diferenciar claramente entre cantidades, números y medidas y, por otro, a constatar la simplificación realizada en la construcción matemática del conjunto de los números enteros, obviándose en el paso de N a Z la existencia de unos elementos intermedios que hemos llamado "números naturales relativos"[9] y que aparecen explícitamente en el terreno de las cantidades y de las medidas como cantidades "adjetivadas" o medidas "dirigidas", con un peso importante en las actividades cotidianas del ser humano. Estas medidas naturales relativas, que son el resultado de la comparación aditiva entre cantidades y medidas naturales, son tratadas tradicionalmente dentro del campo de aplicación de los números enteros, a pesar de presentar características diferentes de las que poseen las medidas enteras.

c).- Un estudio de las relaciones y elementos que forman parte de cualquier proceso de metrización discreta, permite configurar y organizar un modelo aditivo completo que relaciona las diferentes consideraciones epistemológicas en un planteamiento formal del que

[9]Terminología que coincide con la empleada en el contexto anglosajón para los números enteros ("números relativos"). Conviene aclarar aquí que no nos estamos refiriendo a los números enteros sino a unos conceptos numéricos con estructura y propiedades diferentes de las que poseen los enteros y los naturales.

se justifican sus elementos y construcciones.

El análisis formal y estructural que conforma el modelo mencionado permite definir, por un lado, el concepto didáctico de "situación relativa aditiva" como elemento genérico del campo de aplicación de los números naturales relativos, establecido previamente en términos de las relaciones cuantitativas usuales (combinaciones, comparaciones y transformaciones) y, por otro, afirmar y justificar la existencia de diferencias estructurales y lógico-formales entre los números naturales, los números naturales relativos y los números enteros. Tres tipos de conceptos numéricos estrechamente relacionados entre sí, entendidos como estructuras numéricas constituídas por conjuntos de entes entre los que se definen operaciones aritméticas y relaciones diferentes, que ejemplifican tres tipos de campos conceptuales aditivos; es de especial interés para nosotros el estudio del campo conceptual de los números naturales relativos.

d).- Si los números naturales relativos son realmente diferentes, si no se ajustan a las estructuras algebraicas de los conjuntos numéricos usuales, cumpliendo propiedades especiales que no verifican ninguno de ellos, conviene comprobar si también son diferentes para los sujetos. Esta será la última parte del problema, que abordaremos parcialmente en la presente investigación y mediante la que pondremos de manifiesto la existencia de funciones cognitivas específicas, que contribuyen a establecer el campo conceptual mencionado.

En resúmen, el núcleo del problema consiste en clarificar, describir y organizar el campo de los conceptos y relaciones que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre números naturales, naturales relativos y enteros, comprobar la diferencia en el uso de tales conceptos y los tipos de problemas que se abordan en cada caso. Para ello, según se expone con detalle en los diferentes capítulos del trabajo, se realizan los siguientes estudios:

1).- Un <u>estudio teórico</u> basado en un análisis didáctico/conceptual, apoyado en criterios metaanalíticos y mediante una revisión multivocal con intención integradora, sobre los números naturales y los números enteros, sus estructuras aditivas y ordinales y los campos de aplicación correspondientes; un estudio que se realiza desde cuatro enfoques diferentes: epistemológico, fenomenológico, cognitivo y curricular.

Como resultado de dicho trabajo teórico se identifica, desde la necesidad didáctica, un subdominio intermedio entre el de aplicación de la aritmética natural y el de aplicación de la aritmética entera, que se caracteriza por la intervención de un tipo de números (naturales relativos) del que se analizan sus propiedades y se integra en un modelo descriptivo completo para el campo aditivo. De estos resultados se deducen consecuencias importantes para la organización del dominio que se basan en las diferencias estructurales existentes entre los tres tipos de números.

2).- Un <u>estudio empírico</u> orientado a falsar una parte de los resultados del estudio teórico, con el que se pretende poner de manifiesto que las diferencias lógico-formales y fenomenológicas se manifiestan también como diferencias cognitivas, observables a través de las respuestas de una muestra de sujetos a unos cuestionarios construídos sobre las características diferenciadoras de las estructuras ordinales de los números naturales relativos y los números enteros.