

Introducción

Esta publicación, que tiene su origen en un estudio realizado en el campo de la Didáctica de los números enteros¹, es el resultado de una investigación realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada para la consecución de la tesis doctoral titulada “El campo conceptual de los números naturales relativos” dirigida por el Profesor Dr. D. Luis Rico Romero.

El trabajo previo, que no hubiera sido posible sin el concurso y el esfuerzo conjunto del grupo de compañeros autores del mismo, no sólo ha sido interesante, sino también necesario para el desarrollo de futuras investigaciones sobre el tema. Además de ofrecer una recopilación de buena parte de la información disponible en aquél momento, ha permitido localizar los problemas básicos y los subordinados, y establecer, como consecuencia, una jerarquía racional de prioridades de investigación que han servido de referencia para el trabajo que presentamos. De hecho, muchas de las conjeturas y conclusiones que figuran en aquella publicación permanecen, todavía, como hipótesis de investigación.

En los sucesivos capítulos de la presente obra se expone una parte de los principales resultados de un análisis epistemológico, fenomenológico, cognitivo y didáctico efectuado sobre el campo de aplicación de los números naturales y los números enteros, afectando, en particular, a las cantidades y medidas discretas así como a las situaciones y problemas aritméticos involucrados en la educación del pensamiento numérico aditivo. El análisis lógico-formal de las relaciones entre las cantidades, los números y las medidas discretas elementales conduce a la detección y delimitación precisa de una laguna en los conocimientos relacionados con el campo objeto de estudio. Como consecuencia se desarrolla un análisis teórico en el que se constata, por un lado, la necesidad didáctica de considerar nuevos entes numéricos (los números naturales relativos), con características diferenciadas de las que poseen los números naturales y los números enteros, y la pertinencia de un modelo global que incluya el nuevo campo conceptual numérico establecido, y, por otro, la necesidad de modificar los planteamientos didácticos usuales sobre numeración y cálculo en los niveles elementales. La constatación empírica, añadida, de la existencia de diferencias en el plano cognitivo, contribuye a reforzar los planteamientos teóricos anteriores

¹González, J. L. y otros (1990).

y a reafirmar que el tratamiento didáctico usual de los números enteros presenta serias deficiencias que explican una buena parte de los errores y dificultades detectadas en Aritmética y en Álgebra y que pueden ser corregidas si se toman en consideración los resultados del estudio que presentamos.

El trabajo se expone en cinco partes diferenciadas que se desarrollan como sigue:

I.- El problema de investigación. Conceptos y métodos.

La primera tarea ha consistido en delimitar el área problemática y el problema concreto de investigación así como explicitar los motivos que justifican el trabajo, los fines o metas que se pretenden alcanzar y, por último, los principios de los que se parte, entre los que ocupan un lugar destacado los principios metodológicos.

En esta parte se exponen las referencias fundamentales de la investigación, distribuidas en dos capítulos: en el **capítulo 1** se presenta, de manera esquemática, el origen, la evolución y la delimitación precisa del problema, estableciendo un nexo de unión entre la publicación previa mencionada y el estudio que presentamos; en el **capítulo 2** se detallan los objetivos, las hipótesis, la metodología, el desarrollo temporal del trabajo y su situación en relación con los paradigmas y marcos convencionales de la investigación científica.

II.- Primera fase del análisis didáctico: revisión de los antecedentes.

Los estudios y publicaciones relacionados específicamente con la **Epistemología y Didáctica de los números enteros** son escasos y se refieren, en su mayor parte, a cuestiones superficiales con poca incidencia en el núcleo de la investigación. La preocupación por los aspectos sintácticos, por el aprendizaje y el dominio de reglas así como por los métodos didácticos más adecuados, de entre lo que destacamos la preocupación por la búsqueda de modelos coherentes y completos para la enseñanza, dominan el panorama del área problemática.

Por el contrario se han encontrado numerosos trabajos que tienen una relación indirecta, aunque de interés, con el problema de investigación. Tal es el caso, entre otros, de los estudios sobre resolución de problemas, historia y epistemología de la aritmética y el álgebra, enseñanza y aprendizaje en la iniciación al álgebra, aritmética con números naturales, estructuras aditivas y multiplicativas en el marco de lo que Vergnaud (1982, 1983) llama “campos conceptuales”, o los trabajos de Bell, A. (1982, 1986) encuadrados dentro de la “enseñanza por diagnóstico”.

En un tercer nivel, más general, encontramos una diversidad de trabajos relacionados con errores y obstáculos en Educación Matemática, con el problema de la representación en Matemáticas y en Educación Matemática, con la Historia y Epistemología de la Matemática y de las Ciencias, que han contribuido a la clarificación de los aspectos generales del problema, o con las consideraciones sobre la línea de investigación conocida como Pensamiento Numérico.

La información relacionada en los párrafos anteriores se ha sometido a un

procedimiento metodológico de síntesis metaanalítica cualitativa que hemos denominado “análisis didáctico”, mediante el que se efectúa un estudio sistemático que se desarrolla en dos fases diferenciadas:

En la primera fase, que hemos denominado de revisión primaria de los antecedentes, se han analizado documentos que se agrupan en tres grandes apartados: **a)** Historia y Epistemología, **b)** Desarrollo cognitivo y aprendizaje, y **c)** Fenomenología, enseñanza y currículum.

La presentación de los resultados de esta primera fase se realiza en tres capítulos que se corresponden con cada uno de los apartados mencionados, es decir: el **capítulo 3** se dedica a la Epistemología y sus relaciones con la Educación Matemática, en general y en el caso de los números enteros; el **capítulo 4** incluye una revisión de las publicaciones sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de los números en general y de los números enteros en particular; el **capítulo 5** presenta una revisión comentada de investigaciones y trabajos publicados sobre fenomenología, enseñanza y aspectos curriculares en relación con el problema de investigación. En cada uno de ellos, por motivos de organización, la exposición va de lo general a lo particular, si bien los tres son independientes y se pueden abordar por separado.

En la segunda fase, cuyos resultados se exponen en el **capítulo 6**, se establecen, a modo de introducción de los capítulos restantes de la memoria, las primeras conclusiones que se deducen del análisis de las relaciones entre los resultados relevantes de la revisión realizada en la fase 1 (capítulos 3, 4 y 5) y de los resultados del estudio previo realizado. Estas primeras conclusiones del análisis didáctico justifican las decisiones tomadas con respecto al estudio teórico que se desarrolla en la parte III y al estudio empírico que se expone en la parte IV.

III.- Estudio teórico.

Analizar y cuestionar en profundidad los aspectos básicos, tanto matemáticos como epistemológicos, correspondientes a un tema de interés en Educación Matemática puede suponer, en algunos casos, un cambio cualitativo importante en la manera de entender y abordar la investigación. Y es posible, quizás, que sea el único procedimiento para que salgan a la luz nuevos datos sobre temas aparentemente estancados o saturados desde el punto de vista de la investigación educativa. El caso que nos ocupa puede ser uno de ellos, dado que los resultados de esta tercera parte creemos que son un buen ejemplo que ilustra las afirmaciones anteriores.

En los capítulos 7, 8 y 9 se presentan los aspectos fundamentales del trabajo teórico desarrollado a partir de los resultados del análisis didáctico que se expone en la parte II. Con él se pretende configurar un marco instrumental y explicativo que delimite con claridad el conjunto de fenómenos en estudio, permita situar y relacionar entre sí las investigaciones realizadas hasta la fecha y fundamente el desarrollo empírico que se expone en la parte IV y

que se centra en la aplicación de algunos aspectos del contenido de esta tercera parte. Al mismo tiempo, desde un punto de vista más general, se espera que los resultados obtenidos contribuyan al desarrollo de futuras investigaciones sobre la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra en los niveles intermedios de la escolaridad obligatoria.

A partir de un análisis de los diferentes tipos de cantidades, medidas y números que intervienen en el dominio definido por el problema de investigación se construye, en el **capítulo 7**, un modelo completo que incluye a los números naturales relativos, como tercera estructura numérica, junto a los números naturales y los números enteros; los elementos y relaciones que integran dicho modelo delimitan lo que se define en el mismo capítulo como *campo conceptual de los números naturales relativos*. En los dos capítulos restantes se refuerzan y se complementan los planteamientos anteriores: en el **capítulo 8** se analizan en profundidad las diferencias lógico-formales entre los números naturales relativos y los números enteros, mientras que en el **capítulo 9** se aborda el desarrollo amplio de una de las principales consecuencias del estudio teórico, como es la organización completa de los problemas y situaciones del dominio de aplicación del campo conceptual definido.

IV.- Estudio empírico.

Las consideraciones teóricas de la parte III hacen referencia a aspectos estructurales y formales sobre los números naturales relativos y los números enteros, encuadrados dentro de un modelo que permite organizar formalmente el campo de estudio. Una de las principales conclusiones establecidas es la que se refiere a la existencia de diferencias entre ambos tipos de números, de las cuales ocupan un lugar destacado las que corresponden a la estructura ordinal.

En el estudio empírico que se presenta en este cuarto apartado se somete a contraste una parte de dichas conclusiones teóricas, para lo que se realiza una indagación de carácter exploratorio sobre el funcionamiento del pensamiento numérico relativo a través de las respuestas de una muestra de sujetos a una serie de cuestiones organizadas que se refieren a situaciones cotidianas en las que interviene la comparación aditiva y el orden; estudio que representa una pequeña parte de un panorama más amplio y que abre nuevas vías que configuran, a nuestro entender, un programa de investigación cuyos rasgos se detallan en el capítulo 12.

El estudio se desarrolla en dos capítulos: en el **capítulo 10** se exponen los planteamientos metodológicos, las metas y principios, las variables consideradas y los instrumentos de recogida y de análisis de datos utilizados; en el **capítulo 11** se expone el procedimiento seguido en la recogida de datos así como los resultados y conclusiones que se deducen de la aplicación de los cuestionarios.

V.- Conclusiones generales y perspectivas futuras.

En el **capítulo 12**, junto a las conclusiones de la investigación, se incluye una breve panorámica de los problemas e interrogantes a los que se les debe prestar atención en el

futuro.

Para terminar, es justo reconocer el esfuerzo conjunto de un colectivo de personas. En particular quiero expresar mi agradecimiento: a Luis Rico Romero, mi profesor, por su inestimable guía y apoyo; a los compañeros de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga por su colaboración desinteresada y su disposición al diálogo; a la profesora Teresa Rivas y al profesor Ramón Hidalgo por su orientación sobre algunos aspectos del estudio empírico; al profesor Juan José Saameño por la revisión de una parte del estudio teórico; a los profesores David y Alfonso Ortiz Comas por su colaboración en la aplicación de los cuestionarios; a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y a los compañeros del Programa de Doctorado del bienio 88 - 90 por su aliento y por prestar un marco de debate que ha contribuido a la realización de este trabajo.