

A).- Introducción

Estudio de la comprensión Racionalidad / justificación

Investigación en Educación Matemática

- Aspecto central en numerosas investigaciones
- Análisis Didáctico (cognición, relaciones)
- Estudios Cognitivos (rendimiento, dominio)
- Observación de comportamientos y respuestas
- Interpretación de comportamientos y respuestas

Racionalidad / justificación

Investigación en Educación Matemática

Dificultades a superar

- depende de numerosos factores y variables
- múltiples usos y significados
- múltiples definiciones y modelos teóricos
- construir modelos plausibles (funcionamiento interno)
- cómo provocar comportamientos observables e interpretables útiles

Algunas cuestiones y conjeturas

- **¿Qué es comprender un conocimiento matemático? (aproximación operativa, teórica y provisional)**
- **¿De qué depende la comprensión?; ¿cuáles son los factores que intervienen? (aproximación operativa, teórica y provisional)**
- **¿Cuándo podemos decir que un individuo comprende un conocimiento matemático?**
- **¿Cuáles son las manifestaciones observables de una “buena” comprensión y de una comprensión deficiente?**

Algunas cuestiones y conjeturas

- **¿Se puede hablar de distintos tipos y grados o niveles de comprensión?**
- **¿Cómo observar / constatar el estado, nivel o grado de comprensión?; ¿cómo distinguirlos?**
- **¿Qué tareas, métodos, técnicas e instrumentos son necesarios para poder observar / constatar tales situaciones?**
- **¿Plan de trabajo, prioridades y agenda de investigación?**

A responder a corto plazo (primeras cuestiones)

Comprensión del conocimiento matemático:

¿características específicas propias?

¿depende del tipo de conocimiento matemático?

¿Es reversible?

¿Qué tareas, métodos, técnicas e instrumentos son necesarios para poder observar / constatar la situación de la comprensión?

• ¿Cuáles son las manifestaciones observables de una comprensión buena o satisfactoria?; ¿y de una comprensión deficiente?

A responder a medio y largo plazo (varios estudios)

- **¿Qué es comprender un conocimiento matemático?**
- **¿De qué depende la comprensión?; ¿factores que intervienen?**
- **¿enseñanza para la comprensión?; ¿es posible?; ¿cómo?**
- **¿Relaciones entre razonamiento y comprensión?**
- **¿formación inicial y permanente de profesores?**
- **¿efectos del currículo sobre la comprensión?**

¿Cuándo podemos decir que un individuo comprende un conocimiento matemático?

SI

- Aplicación espontánea a situaciones nuevas
- argumentación espontánea y coherente para justificar
- Respuesta adecuada Capacidad para responder
- Resolución con éxito de problemas
- Empleo adecuado en razonamientos
- Dominio conexiones significativas
- Capacidad para explicar a otros con éxito
- Concordancia de significados con expertos

NO

- Incapacidad de aplicación a situaciones nuevas
- argumentación defectuosa para justificar
- Respuesta inadecuada Incapacidad para responder
- Fracaso en resolución de problemas. Errores
- Empleo inadecuado en razonamientos
- Falta de dominio conexiones significativas. Lagunas
- Incapacidad para explicar a otros con éxito
- Discordancia de significados con expertos

Algunas reflexiones iniciales

¿Se puede hablar de distintos tipos / formas de comprensión debidas al conocimiento?

Puede haber diferencias en la comprensión de un/una:

Demostración, propiedad, concepto, técnica, estrategia, procedimiento, representación, definición, razonamiento, tarea, enunciado, transformación sintáctica, teoría, etc.

Incluso hay diferencias dentro de un tipo de conocimiento (Ej- algoritmo: según el tipo de números, su naturaleza, representación, tipo de tarea, papel del algoritmo, aplicaciones, etc.)

Las diferencias intrínsecas o debidas al conocimiento dependen de:

- los conocimientos previos constituyentes
- la naturaleza y los factores (est Epistemológica)
- las situaciones y fenómenos (est Fenomenológica)

Algunas reflexiones iniciales

¿De qué otros factores “externos” puede depender la comprensión?;

- Las características cognitivas (representaciones, actitudes, destrezas, capacidades, etc.)
- Las claves socioculturales (expectativas, valores, creencias, experiencias socioculturales, etc.)
- La historia didáctica individual y colectiva, el enfoque de los libros de texto y de la enseñanza usual, la metodología, el contrato didáctico, las experiencias escolares y extraescolares, etc.

B).- Antecedentes

¿Qué es comprender un conocimiento matemático?

- Hiebert y Carpenter (1992) (concepción fundamental):
 - Modo de representación y estructuración de la información (interna y externa)
 - Establecer **conexiones** entre ideas, hechos, conocimientos
 - Identificar algo como parte de una **red interna**
 - Reconocimiento de **relaciones** entre piezas de información
- Davis (1992): Metáfora del puzzle
- Koyama (1993, 1997, 2000):
 - Comprensión en acción (enseñanza-aprendizaje en el aula)
 - Dos ejes: niveles de comprensión y etapas de aprendizaje

¿Qué es comprender un conocimiento matemático?

- Sierpinska (1994):

¿es la comprensión un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual o una forma de conocer?

(la comprensión es “. . . un acto, pero un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo esta interpretación una dialéctica en desarrollo entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de estas conjeturas” (p. 26))

- Proceso-acto-estado mental (forma de ver las cosas, forma de conocimiento, modelo mental)
- Coherencia entre formas de pensamiento y experiencias
- Comprensión - obstáculo epistemológico

¿Qué es comprender un conocimiento matemático?

Duffin y Simpson (1997):

“a menos que la comprensión se manifieste no tenemos ningún modo de inferir algo sobre el nivel de comprensión que tiene el sujeto; incluso, cuando este sujeto está haciendo algo (como dar una explicación o resolver un problema) no podemos ver que la comprensión se está manifestando, únicamente interpretamos nuestras observaciones como el uso de esa comprensión...” (p. 169).

- Tomar conciencia de las estructuras mentales internas
- Si se comprende no es necesario recordar detalles
- Ser creativo (Poincaré (1908))
- Usar conexiones para resolver un problema

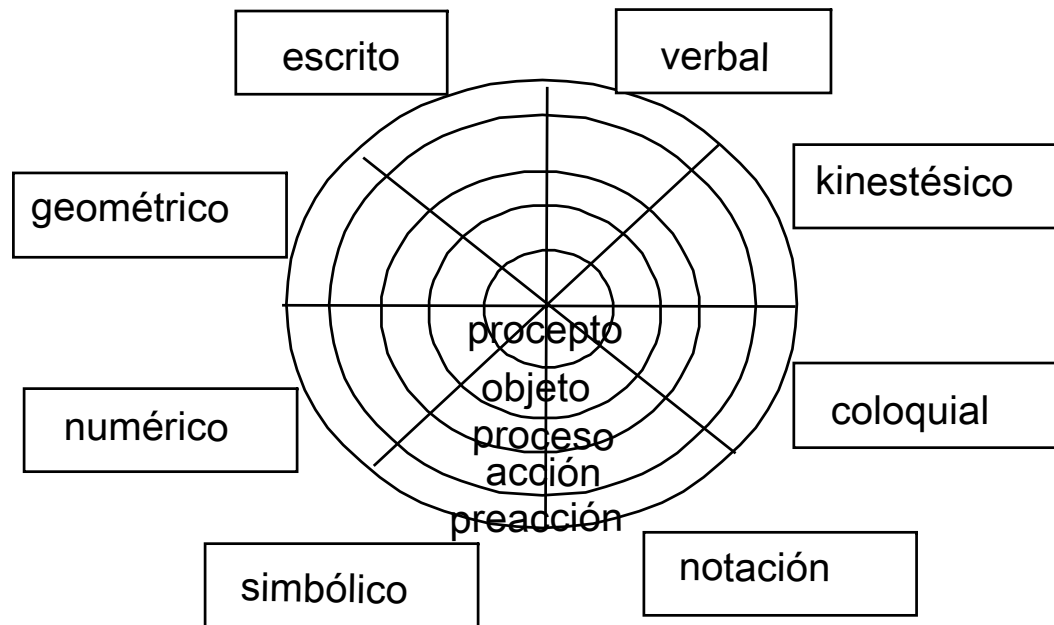
¿Qué es comprender un conocimiento matemático?

- Romero y Rico (1999) (número real):
 - Dominio de los sistemas de representación
 - Asignar sentido o significado
 - Establecer conexiones con otros conocimientos, experiencias y situaciones
- (Gusev y Safuanov, 2000)

“Comprender un fenómeno significa descubrir la esencia, revelar las razones de su origen, su correlación con otros fenómenos, su lugar en un sistema de fenómenos circundantes. El acto de comprensión puede no ser momentáneo, tiene una variedad de parámetros interconectados”

¿Se puede hablar de distintos grados o niveles?

- Jan de Lange (1996): Reproducciones, conexiones y análisis
- DeMarois, Tall (1997) (concepto de función) (facets and layers)



¿Se puede hablar de distintos grados o niveles?

- Pirie y Kieren (1989, 1994): Ocho niveles potenciales para caracterizar la evolución de la comprensión
- Niveles de Van Hiele (pensamiento geométrico)
 - **Visualización** reproducción
 - **Análisis** primeras conexiones
 - **Deducción informal** conexiones informales
 - **Deducción** análisis lógico-matemático
 - **Rigor** análisis matemático formal

¿Cómo observar la comprensión?

Duffin y Simpson (1997): *efectos observables*

- Características internas

¿Darse cuenta? (construcción (proceso))

Sentimiento de confort, de ser capaz de ignorar u olvidar cosas
y poder reconstruir más tarde (disposición (estado))

Capaz de resolver problemas, de explicar, de extraer
consecuencias, etc. (funcionamiento (acto))

- Manifestaciones externas

parpadeo, sorpresa (construcción (proceso))

Ninguna (disposición (estado))

Hacer (tareas no rutinarias) (funcionamiento (acto))

C).- Nuestra aproximación

Fundamentos teóricos (fuentes y marco general)

- **Epistemología genética (Piaget):**

- adaptación al medio, acción como base de la construcción y génesis del conocimiento

- **Constructivismo radical (von Glasersfeld, 1987):**

- (1) El sujeto construye activamente el conocimiento; producto de la organización conceptual; no transferible;
- (2) La función de la cognición no es describir una realidad externa, sino construir estructuras cognitivas para resolver los problemas de la experiencia (responder, adaptarse al medio)

- **La comprensión de un conocimiento depende estrechamente de la epistemología y fenomenología del mismo:**

Fundamentos teóricos

(matices)

- Constructivismo social (Ernest, 1994):
 - El conocimiento procede de procesos cognitivos internos y de experiencias socioculturales “externas”. Estas determinan la construcción de conocimientos y afectan a los procesos “internos”
- Juega un papel importante la representación del conocimiento matemático; representación interna y externa; sistemas de representación.
- Escaso interés por el marco general más allá de su utilidad para modelizar estudios empíricos

Fundamentos teóricos

(algunos principios sobre la comprensión)

En cuanto a la estructura : metáfora del puzzle (sentido de la totalidad y de las partes)

En cuanto a la naturaleza: Estrecha relación entre “entendimiento” e “interpretación”; la comprensión es un “modo de experiencia” del ser humano (Habermas)

En cuanto al funcionamiento: Mecanismo de respuesta. Capacidad de respuesta acuñada a partir de la experiencia. Relación entre estados mentales (internos) y la conducta externa, entre naturaleza y efectos.

(relación)

Investigación sobre comprensión . . . Métodos de investigación₂₂

intenciones básicas:

1.- **operatividad**: capacidad para proporcionar categorías, tareas, medios e instrumentos válidos y fiables para la observación y el diagnóstico

2.- **integración** de las principales teorías, opiniones y tendencias

3.- **dialéctica** teoría-práctica: el modelo debe evolucionar mediante sucesivas aproximaciones basadas en resultados de estudios teórico-empíricos

dos enfoques de análisis de la comprensión :

- funcionamiento, origen y génesis (aspectos *dinámicos*)
- estructura, naturaleza y características (aspectos *estáticos*)

Nuestra posición :

- Se sitúa en el primero por la dificultad del segundo
- No niega la naturaleza y características internas
- Es difícil entrar direct. en dichos planteamientos
- Es más efectivo centrar primero la atención en los efectos observables y en los aspectos dinámicos

¿Cómo observar / constatar el estado, nivel o grado de comprensión?; ¿cómo distinguirlos?

- **Nuestra posición:**
 - Partir de la situación del conocimiento en el marco del análisis didáctico (características didácticas frente a la comprensión)
 - En busca de fenómenos y situaciones que permitan la actuación y la implicación del sujeto (métodos y tareas adecuadas)
 - Para provocar manifestaciones externas observables, significativas, fiables y susceptibles de categorización en un esquema de conjunto (categorías, modelos)

¿Cómo observar / constatar el estado, nivel o grado de comprensión?; ¿cómo distinguirlos?

- Para ello son necesarios:
 - sistemas de referencia y escalas relativas que permitan valorar, medir y comparar estados de comprensión (niveles) y su evolución
 - Métodos: teóricos y empíricos cualitativos y cuantitativos . . . experimentar
 - Tareas: no familiares, atractivas, abiertas, de manipulación y representación
Experimentar
 - Es fundamental el análisis de tareas y su categorización

Un sujeto comprende cuando, buscando una mayor estabilidad relativa o un mayor equilibrio cognitivo, elabora/construye y emite una respuesta adaptada a su satisfacción a una situación o experiencia que le ha provocado un desequilibrio y en la que se ha visto implicado o en la que ha decidido voluntariamente implicarse.

comprender es sinónimo de responder, fabricar una respuesta para actuar o intervenir, todo ello de forma adaptada;

Alternativamente :

un sujeto que no responde puede que sea debido a que realmente no tiene esa comprensión o no domina ese instrumento o a que decide no implicarse en la tarea o la situación, a pesar de conocer perfectamente la respuesta, o a que no responde o no quiere responder por otros motivos;

en cualquier caso, **si un sujeto no responde, no podemos afirmar nada sobre su comprensión** de lo que constituye el núcleo de las posibles respuestas adaptadas.

responder incluye, entre otras cosas :

“analizar la situación de interacción y valorar la información para que sea posible completar el proceso que sigue, decidir intervenir activamente o implicarse haciendo suya la situación, elaborar o construir una respuesta, emitirla y/o actuar en consecuencia, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de la misma a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando o completando algunos pasos del proceso”

“Lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para responder voluntariamente a una situación, explica o proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende”

Probablemente el individuo comprende más de lo que manifiesta mediante su comportamiento, pero nunca menos si la implicación es importante y voluntariamente decidida y el rendimiento es alto en la elaboración y valoración de la respuesta, es decir, si la utilización reúne unas condiciones determinadas, que son las que habrá que fijar claramente para alcanzar un grado de fiabilidad apreciable en el diagnóstico y la valoración de los comportamientos

- Sólo se podrá constatar/observar la comprensión de un conocimiento cuando se produzca su utilización efectiva en una variedad de situaciones.
- **Comprender un conocimiento (o un aspecto de un conocimiento) es hacerlo operativo o disponible para su utilización en situaciones que lo requieran. Un sujeto comprende un conocimiento cuando lo hace operativo, es decir, cuando llega a formar parte del bagaje de conocimientos potencialmente utilizables o listos para ser empleados; cuando el sujeto lo incorpora a su repertorio de útiles o herramientas aplicables.**

- **Comprender = incorporar / disponer = hacer operativo = conectar/ relacionar significativamente = utilizar**
- No se puede afirmar nada cuando el sujeto no actúa o no utiliza un conocimiento. Únicamente, cuando no lo utiliza debiendo hacerlo, cuando lo utiliza de forma inadecuada o cuando utiliza inadecuadamente otro conocimiento en su lugar.

Observaciones sobre la utilidad del modelo para la investigación: Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático

Para observar la situación real o el estado real de la comprensión de un sujeto, es necesario ponerlo en disposición de emplear todas las herramientas, capacidades y conocimientos a su alcance (disponibles) para responder y solventar con éxito una situación que requiere de dicha actuación.

Es necesario construir un medio de observación adecuado, es decir, formado por situaciones :

- para cuya resolución sea necesario emplear aquello que queremos observar y de la manera en la que queremos que sea empleado y no otra cosa;
- que logren implicar al sujeto, que motiven la actuación de este, que le obliguen a dar una respuesta;
- que si son resueltas con éxito podamos asegurar que el sujeto domina / comprende lo que se trata y de la forma determinada en la que se trata.

Por otra parte, se ha de evitar la posibilidad de que los sujetos puedan responder adecuadamente por casualidad y sin que realmente dominen o comprendan lo que se pone en juego;

para ello se emplean dos estrategias o se ataca en dos frentes distintos: a) se elaboran las situaciones, tanto en número como en forma, procurando que esto no pueda ocurrir; b) los estudios cuantitativos (cuestionarios, etc.) se complementan con estudios cualitativos en los que se debe comprobar que los sujetos han respondido así porque esa es realmente la situación de la comprensión que tienen, es decir, se comprueba empíricamente que no ha ocurrido lo que inicialmente se plantea

Proceso práctico

- (1) Análisis Didáctico de los antecedentes del problema
- (2) Análisis fenomenológico y epistemológico del conocimiento implicado
- (3) Descripción del campo situacional o campo fenomenológico genérico del conocimiento

Proceso práctico

(4) Clasificar las situaciones obtenidas en unas pocas categorías para determinar la “estructura fenomenológica” del conocimiento. Las categorías surgen del propio conocimiento matemático, del estudio de cómo y dónde (en qué situaciones) se puede emplear dicho conocimiento

(5) Elegir de cada categoría una o varias situaciones con las siguientes características: (a) en número reducido para que sea viable su propuesta a una muestra de sujetos, (b) que sean representantes del resto, (c) que de las respuestas dadas por los sujetos en su intento por resolverlas se pueda extraer una mayor información que la simple valoración clásica de resp. correcta – resp. incorrecta

fenomenología en el sentido de Freudenthal, como método de análisis de los contenidos matemáticos:

“Fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirla en su relación con los fenómenos para los cuales fue creada y a los que ha sido extendida en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica,...” (p. ix) (organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela)

nos interesan los fenómenos a efectos de observación, como medios a través de los cuales poder diagnosticar y valorar la comprensión no sentimos la necesidad de establecer distinción alguna entre tipos de fenomenología (didáctica, genética, histórica)

Para **Puig**:

“El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión ha de mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos” (p. 63).

Puig, tras revisar los términos que originan el sentido de ‘fenomenología’ adoptado por Freudenthal, ‘noumeno’ y ‘fenómeno’, decide sustituirlos respectivamente por los de ‘medio de organización’ y ‘fenómeno’, este último con un significado asociado diferente al original filosófico de apariencia. Así, medio de organización es entendido como “*la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos*” (p. 64), mientras que fenómeno es ahora el objeto de nuestra experiencia matemática.

En nuestra opinión:

entenderemos por análisis fenomenológico de un conocimiento matemático a la descripción de todas aquellas situaciones en las que aparece o tiene sentido utilizar ese conocimiento matemático

En tal sentido, el análisis fenomenológico es considerado como sinónimo de análisis de situaciones o situacional, puesto que identificamos, o más bien sustituimos, el término fenómeno por el de situación. Las situaciones serán las tareas problemáticas surgidas de la experiencia a las que continuamente se está enfrentando el sujeto en contextos diversos; situaciones en las que el empleo de este conocimiento se hace legítimo y contribuye a la obtención de las diferentes soluciones.

**Freudenthal
(1983)**

Noúmeno
(objeto de pensamiento)

Descripción del conocimiento matemático X en su relación con los fenómenos para los que fue creado y a los que ha sido extendido.

Fenómeno

(aquello de lo que tenemos experiencia)

Puig (1997)

Medio de organización

Descripción de los fenómenos para los que el conocimiento matemático X es medio de organización.

Fenómeno

(objeto de nuestra experiencia matemática)

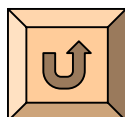
Alternativa

Utilización del conocimiento

Descripción de las situaciones en las que tiene sentido utilizar el conocimiento matemático X.

Situaciones

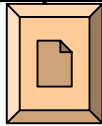
(problemas surgidos de la experiencia)



1

Análisis Fenomenológico/Situacional

Caracterización.
Posicionamiento respecto a
Freudenthal (1983) y Puig
(1997)

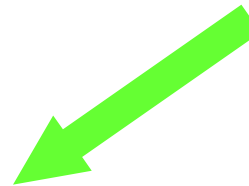
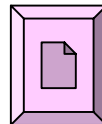


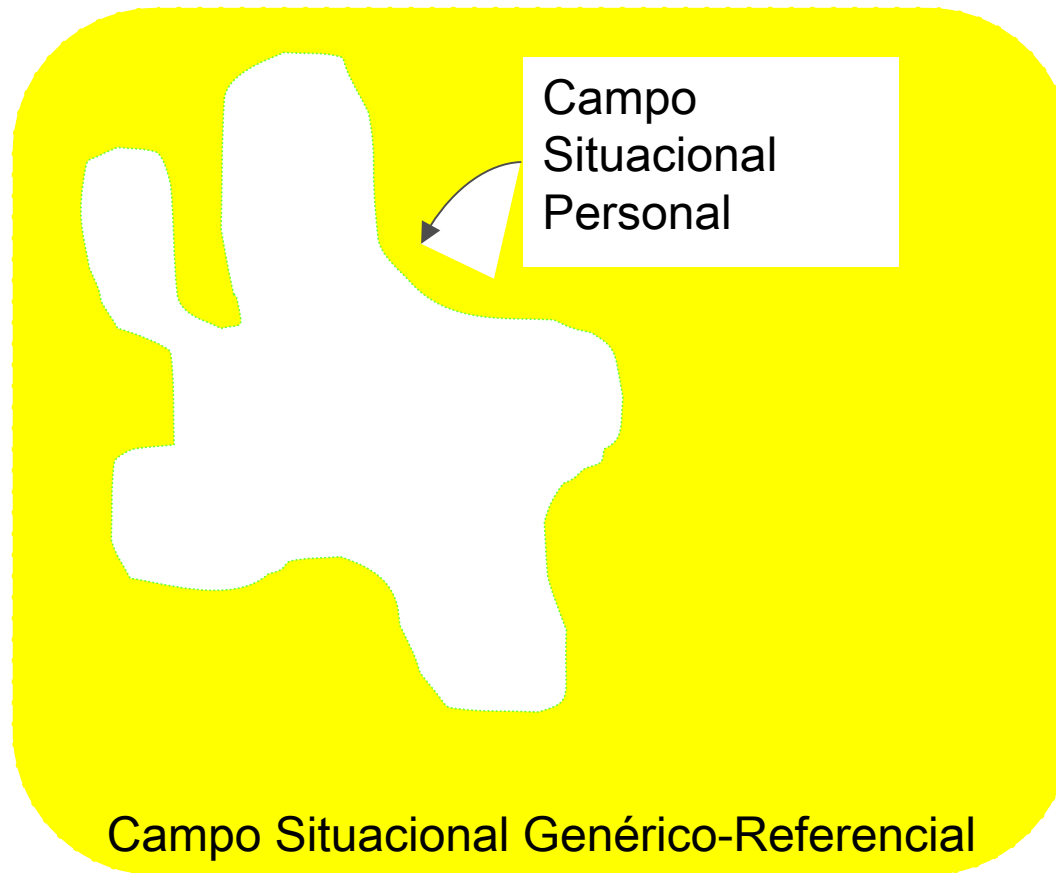
Fuentes del
Análisis

Fenomenológico

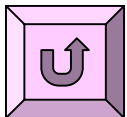
- Libros de Texto
- Antecedentes y Análisis Didáctico
- Conocimiento Especialistas
 - Conocimientos, experiencias y reflexiones personales

Campo Situacional
Genérico-Referencial y
Personal

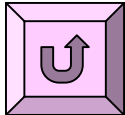
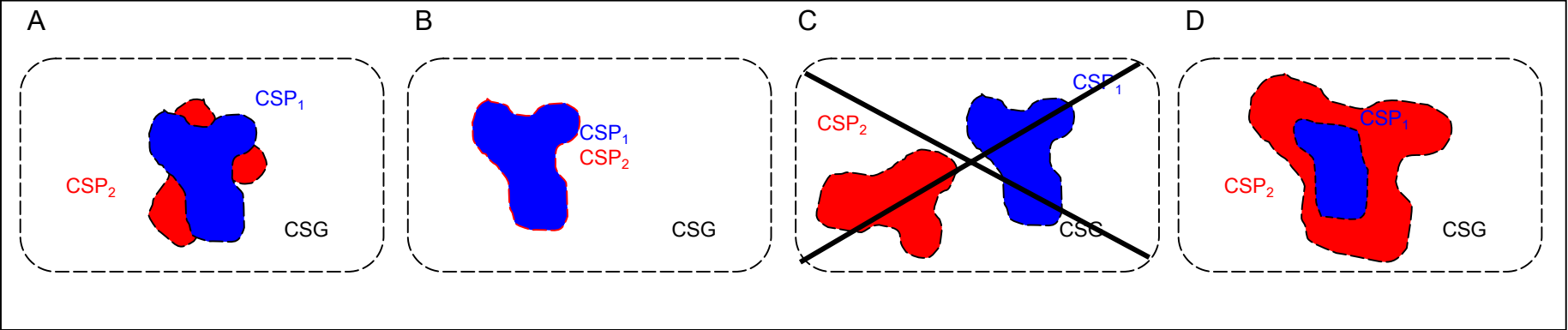




Representación topológica de los campos situacionales Genérico-Referencial y Personal asociados a un conocimiento matemático determinado.



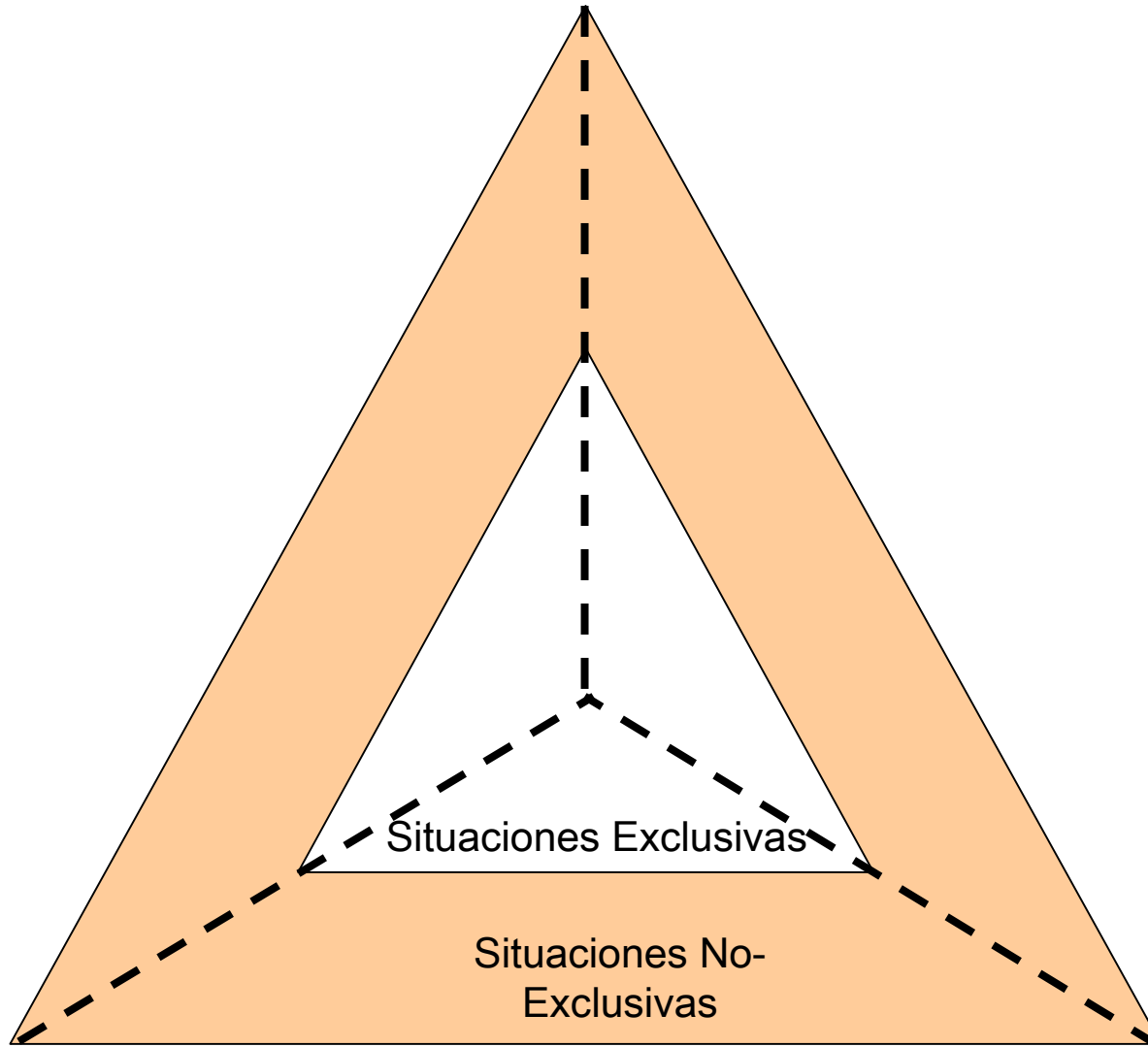
Posibles relaciones entre dos campos situacionales personales CSP_1 y CSP_2 asociados a un mismo conocimiento matemático.



D).- Comprensión del algoritmo estándar escrito de la multiplicación de números naturales

Análisis fenomenológico

- Categorías/tipos de situaciones por la naturaleza y el tipo de utilidad del conocimiento:
 - Técnica
 - Analítica
 - Formal
- Categorías/tipos de situaciones por el protagonismo o l.a relevancia del conocimiento:
 - Situaciones exclusivas
 - directas o puras
 - de aplicación
 - Situaciones no exclusivas



Ejemplos de situaciones

I1: *situaciones exclusivas* de utilización *técnica*

- Ejercicios con el algoritmo, en disposición vertical y horizontal

“Multiplica doce por trece”

- MCCD en versión ejercicio
- Análisis de errores
- Reproducción mental del algoritmo
- *“Completa $34_ \times 10 = 3400$; $21_ \times 6 = 1266$; $23_1 \times 2 = 4602$ ”*. [**Situación frontera**]

Ejemplos de situaciones

I2: situaciones exclusivas de utilización *analítica*

- Criptogramas (p.e., SI x NO = DUDA)
- MCCD versión problema. [**Situación frontera**]
- Tareas con calculadora (p.e., ¿?)
- “*Completa* $34_ x 10 = 3400$; $21_ x 6 = 1266$; $23_1 x 2 = 4602$ ”. [**Situación frontera**]

Ejemplos de situaciones

I3.- situaciones exclusivas de utilización formal

- Desarrollo horizontal y comparación con el vertical.
- Realizar con ayuda de la calculadora multiplicaciones con números grandes (p.e., 123456789×25 ó $123456789 \times 987654321$).
- Modelización con material manipulativo u otros modelos.
- Justificación verbal y algebraica del algoritmo estándar.
- MCCD versión problema. [**Situación frontera**]
- “*Completa* $34_ \times 10 = 3400$; $21_ \times 6 = 1266$; $23_1 \times 2 = 4602$ ”. [**Situación frontera**]

Ejemplos de situaciones

13.- situaciones no exclusivas

- Sumas de sumandos iguales
- Problemas de enunciado verbal
- Comprobación de propiedades
- Cálculo de áreas, etc.
- Fracciones
- Resolución de ecuaciones
- Etc.