

Didactical Analysis: a non empirical qualitative method to found the research activities in Mathematics Education¹

José Luis González Marí

Department of Didactic of Mathematics. University of Málaga. Spain

Thematic group: 7

Abstract En la investigación en Educación Matemática se vienen utilizando métodos usuales en Psicología, Pedagogía y otros campos afines. Pero, si hemos de ser sinceros, muchos de estos planteamientos conducen a resultados demasiado puntuales, poco relevantes y con pocas posibilidades de modificar sustancialmente la práctica educativa. Creemos que el motivo radica en que los métodos que se emplean, apropiados para parcelas específicas del saber o enfoques muy particulares, son, sin embargo, insuficientes para abarcar la complejidad del campo de la Educación Matemática, en el que intervienen múltiples factores que no actúan aisladamente sino interconectados entre sí mediante relaciones que es preciso identificar y analizar previamente en un marco de conjunto. Para realizar esta tarea previa, sobre la que decidir posteriormente el empleo de los métodos más adecuados, venimos utilizando, con resultados aceptables, una metodología no empírica, de carácter integrador y fundada en el metaanálisis cualitativo, a la que hemos denominado Análisis Didáctico². En el presente trabajo se exponen los principios, el marco conceptual y sus componentes, los procesos y las técnicas que conforman esta metodología, aún en fase de estudio.

Introducción

La metodología se ocupa, con carácter general, *de cómo obtenemos conocimientos acerca del mundo* (Denzin, N. y Lincoln, Y., 1994); en nuestro caso, el mundo de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. El estudio de estos fenómenos se suele abordar siguiendo un procedimiento general que Romberg, T. (1992, p. 51) resume en los diez pasos que hemos representado sin sombrear en la figura 1. De estas diez actividades esenciales, el autor concede una especial importancia a las cuatro primeras, que se refieren a la situación de las ideas propias sobre un problema particular, a la relación con el trabajo de otros expertos y a la decisión sobre qué investigar; las restantes actividades (de la 5 a la 10) reflejan la parte operativa o técnica del proceso. Pero, mientras que para el desarrollo de esta segunda parte existen más de veinte procedimientos reconocidos para obtener evidencias, que el mismo autor clasifica en cuatro grandes categorías (pp. 52 y sgtes.), encontramos que las actividades supuestamente más importantes del proceso parecen estar fundamentadas, únicamente y sin ninguna especificación añadida, en la intuición y formación del investigador, en la tradición sobre el problema o fenómeno a investigar (Bishop, A., 1992, pp. 712-714) y en los conocimientos generados con anterioridad por la comunidad de expertos. Estas consideraciones serían suficientes para garantizar la calidad y relevancia de los resultados si los fenómenos y problemas no fueran tan complejos como realmente son, si en las investigaciones se hicieran intervenir de manera efectiva los aspectos fundamentales de esa complejidad en términos de relaciones, si los expertos tuvieran en cuenta una cierta integración de las diversas perspectivas y tradiciones, más allá de la mera interdisciplinariedad, y, por

¹ Versión inicial con algunas partes en inglés y notas bibliográficas incompletas. La versión definitiva se puede encontrar en la página web del Congreso CERME-1. Osnabrüeck. Germany. 1999.

² González, J. L., 1995, págs. 58-61.

último, si los investigadores estuvieran bien preparados. Pero estas condiciones, o no se cumplen con plena satisfacción o existen serias dudas de que así sea, lo que puede conducir, como estamos convencidos, a la existencia de investigaciones “con pies de barro”, es decir, impecables desde el punto de vista operativo o técnico (actividades 5 a 10) pero defectuosas en lo que se refiere a su fundamentación y supuestos de partida (actividades 1 a 4). Para tratar de regular esta situación, lo que no siempre va a ser fácil, en todas aquéllas investigaciones en las que el conocimiento matemático y sus características específicas tienen un papel relevante en el estudio, proponemos introducir, entre las actividades 3 y 4 del esquema de Romberg, un mecanismo de control sistemático de los fundamentos del proceso. Se trata de tres actividades (3.1, 3.2 y 3.3 de la figura 1) que están basadas en un método que venimos utilizando con resultados satisfactorios (González, J. L., 1995, 1998; Ortiz, A., 1997). Este método, que creemos responde a la complejidad y especificidad de los fenómenos educativos en Matemáticas, toma como punto de partida los principios del metaanálisis, la revisión multivocal y lo que se conoce como *análisis conceptual* (Scriven, M., 1988). Para su denominación hemos adoptado el término “análisis didáctico”, empleado por algunos autores (Freudenthal, H., 1983; Puig, L., Cerdán, F., 1988, pág. 74) para indicar “..el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos..” (Puig, L., 1997, pág. 61). En nuestro caso nos referimos a un procedimiento sistemático e integrador que dota de personalidad propia a la investigación en sus primeras fases.

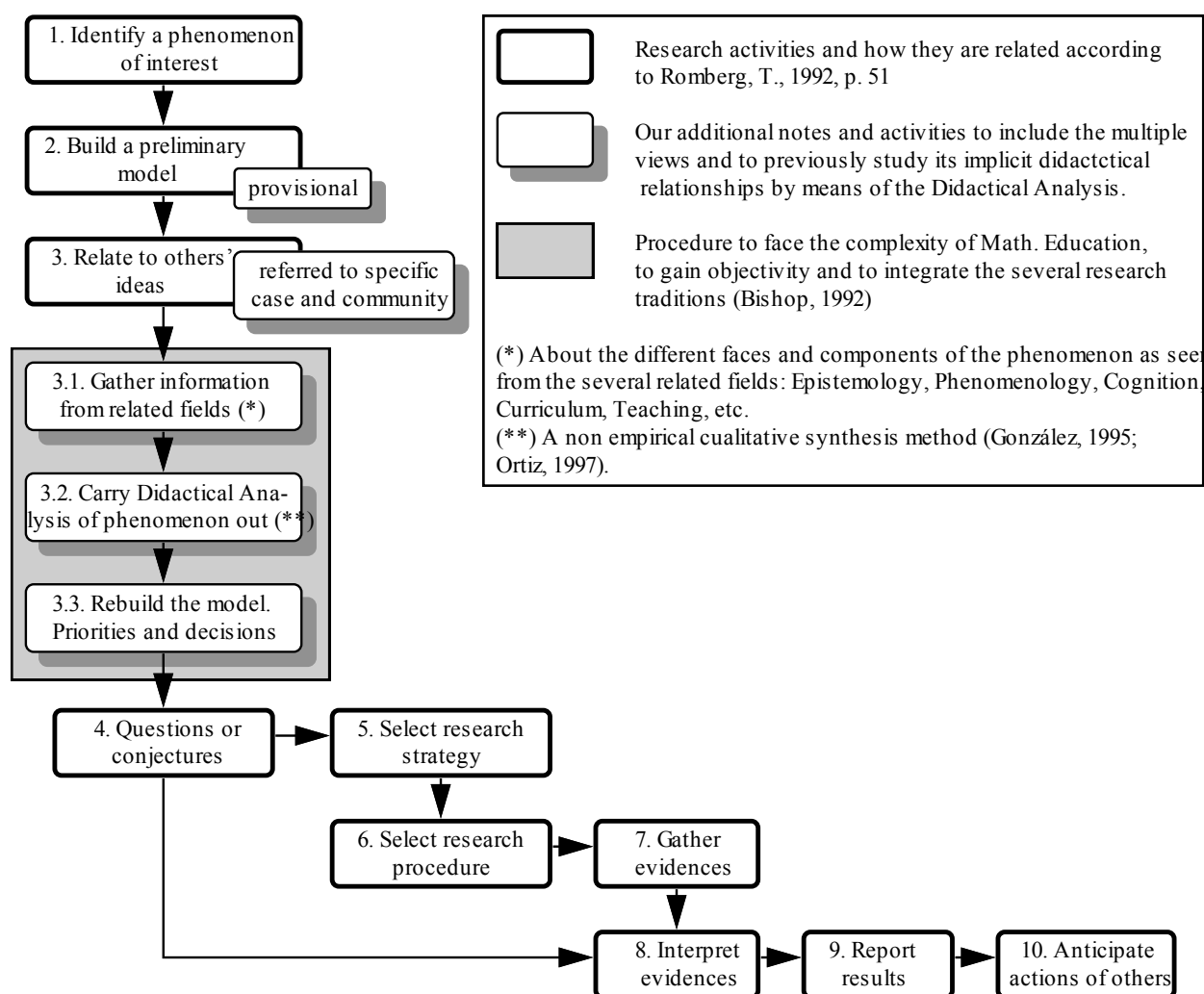


Figure 1.- Research activities and how they would be related according to our experience.

Las principales ideas que justifican la modificación que proponemos son las siguientes: la complejidad de los fenómenos en Educación Matemática, en los que interactúan múltiples factores que dependen unos de otros y para cuyo análisis es necesaria la integración de múltiples perspectivas y procedimientos (Beagle, 1961); la especificidad parcial del campo de estudio, fundada en la intervención del conocimiento matemático y sus características; la insuficiencia de la aproximación interdisciplinar y la necesidad de la consideración conjunta de conocimientos, enfoques y tradiciones diversas en aras de una mayor efectividad. En los apartados que siguen se desarrollan brevemente estas ideas, que nos van a conducir, por último, a una breve descripción del Análisis Didáctico.

Educación Matemática: Un campo de múltiples relaciones vs. múltiples campos relaciona-

Bajo el epígrafe general de la Educación Matemática se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas podemos destacar, en primer lugar, la que atiende a los aspectos cognitivos, abarcando, entre otras, las características y evolución de los **aprendizajes**; errores y dificultades; procesos individuales; semejanzas y diferencias; representaciones; experiencias y formación de conceptos; adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.

Por otra parte, encontramos un campo centrado en la **enseñanza**, en el que se sitúan aspectos como los siguientes: naturaleza, relaciones, estructura y organización de los elementos del currículo escolar (objetivos, contenidos, metodología, otros organizadores (Rico, L., 1997, págs. 39-59), etc.), en presencia de factores y condiciones complejas (socioculturales, económicas, medio-ambientales, etc.); políticas educativas y proyectos curriculares; formación de profesores.

En tercer lugar, podemos distinguir una parte más ligada a la práctica basada en los **procesos de enseñanza-aprendizaje**, en los que interactúan diversos factores de los dos campos anteriores en distintos niveles (diseño, planificación e implementación) (Coriat, M., 1997, págs. 156-157), es decir: métodos y técnicas para provocar aprendizajes óptimos; recursos y medios necesarios; adecuación del currículo a las capacidades y necesidades de los alumnos así como a las necesidades científicas, socioculturales y a las diferencias individuales.

La separación entre estos tres campos, que se observa en el mayor peso dado en las investigaciones a la faceta psicológica o pedagógica de la Educación Matemática, no es acertada, puesto que se encuentran estrechamente relacionados entre sí bajo el denominador común de la Psicología de la Educación Matemática (Fischbein, 1990, pp. 6-12), en lo que constituye un *primer nivel* de relación que da origen a un núcleo de información centrado en las finalidades educativas y en las características generales del conocimiento matemático. A su vez, este primer nivel, de forma general y, en particular, cuando interviene un contenido concreto, presenta una dependencia no menos importante de otros factores básicos, como son la Matemática, su Epistemología y su Historia o la Fenomenología del conocimiento matemático, en lo que constituye un *segundo nivel* de relación centrado tanto en finalidades como en contenidos. Esta segunda dependencia se fundamenta en los siguientes *principios generales*³:

a).- El conocimiento matemático es perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto y tiene que ver con ideas u objetos conceptuales a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias. Estos objetos son independientes de su simboli-

³ Elaborados a partir de las consideraciones de Tymoczko, T. (1986), Davis, P. J.; Hersh, R. (1988) y Puig, L. (1997).

zación, tienen una existencia ficticia o convencional y comparten dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida.

b).- Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes todos ellos a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la actividad matemática (Puig, L., 1997, pág. 67).

c).- La creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

De dichos principios y de las relaciones entre ellos extraemos las siguientes consecuencias:

1.- La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción) se produce en todas las interpretaciones sobre la naturaleza y el modo de producción del conocimiento matemático, de manera que el análisis epistemológico debe tener en cuenta las características de dichos factores.

2.- El análisis del conocimiento matemático desde una perspectiva educativa debe incluir los análisis epistemológico, cognitivo y fenomenológico, que se han de relacionar con un análisis sobre la enseñanza y el currículo como aspectos específicos y terminales de la Educación Matemática; cuatro grandes campos que deben formar parte del marco general de la investigación.

3.- Los análisis epistemológicos y fenomenológicos en la investigación educativa deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés se debe centrar en obtener información relevante para la enseñanza y el aprendizaje, lo que supone tener presente al alumno, sus necesidades y capacidades, el aula, las actividades, métodos y técnicas didácticas usuales, etc.. Con la información obtenida bajo este enfoque peculiar se encuentra la conexión entre las distintas partes de los dos niveles mencionados bajo una referencia única: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación*.

4.- De esta manera se sitúan en una posición privilegiada las relaciones entre la Epistemología de la Matemática y la Psicología de la Educación Matemática, que, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares. Asimismo, la vertiente pedagógica presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas o culturales que vienen a completar una visión global y específica en lo fundamental de un campo en el que existen múltiples relaciones que demandan una integración previa a la realización de los estudios particulares de las distintas parcelas que lo componen y desde los diferentes enfoques que se vienen utilizando.

Pero la integración no debe agotarse en una simple adición de datos procedentes de campos y enfoques diferentes (concepción interdisciplinar). Por el contrario requiere, además, de una elaboración compleja que demanda una metodología específica que trasciende los procedimientos que se vienen utilizando en la parte que hemos denominado técnica u operativa. Veamos porqué.

Insuficiencia de la aproximación interdisciplinar y especificidad

La insuficiencia de la aproximación interdisciplinar en la investigación en Educación Matemática, que ha tenido y tiene hoy día una amplia aceptación en el seno de la comunidad aunque con resultados mejorables (Kilpatrick, J., 1994, pp. 78-79), se basa en las relaciones de dependencia entre los distintos campos y factores que intervienen y en la naturaleza de los fenómenos.

Por una parte, el análisis de las relaciones entre campos aporta matices nuevos y genuínos a la

información aislada; estos matices cohesionan el estudio y proporcionan el carácter integrador que venimos sosteniendo. Pero la necesidad de esta integración no sólo se justifica por las características de las dependencias existentes, sino que puede venir también por la existencia de un estancamiento en las investigaciones o por la situación avanzada en cuanto a cantidad y calidad de los resultados, como ocurre con el caso de las funciones (Harel y Dubinsky, 1992; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993) o de los números racionales (Carpenter, Fennema y Romberg, 1993).

En lo que se refiere a la naturaleza de los fenómenos, sostenemos la existencia de una parte específica que trasciende las fronteras de otras Ciencias de la Educación; basta con analizar las respuestas a los siguientes interrogantes: ¿Existen diferencias importantes entre el conocimiento de los fenómenos en Educación Matemática cuando estos se analizan desde el enfoque particular de la Didáctica de la Matemática y cuando se hace en el contexto de los fenómenos educativos generales?; ¿Donde radican dichas diferencias?; ¿es la Educación Matemática una parte, en el sentido inclusivo, del campo general de la Educación?; si existen diferencias, ¿es adecuado emplear los métodos usuales de la investigación educativa no específica?; ¿son suficientes dichos métodos?; ¿son prioritarios o de aplicación preferente a cualquier otra consideración?.

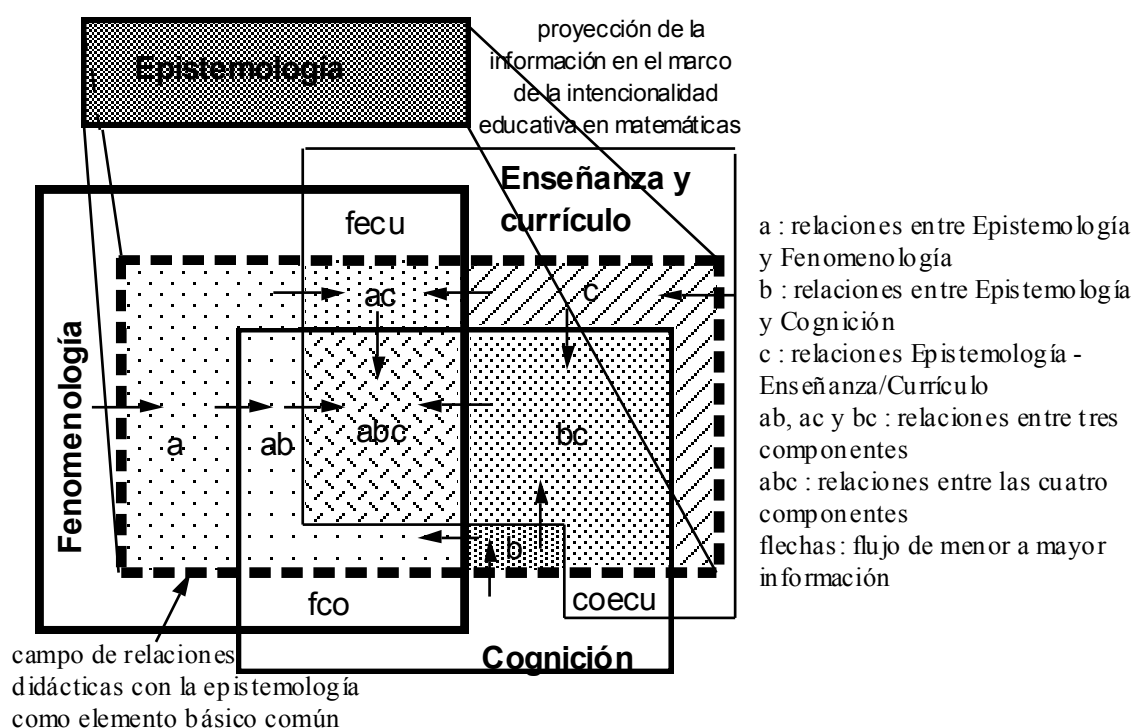


Figura 2.- Relaciones entre las áreas básicas.

No es difícil concluir que lo que caracteriza a una parte importante de la investigación en Educación Matemática no es la interdisciplinariedad sin más, sino una forma específica y más profunda de ver los fenómenos de enseñanza-aprendizaje. Esta visión se puede sintetizar, como hemos visto, en la intervención de unas **componentes básicas específicas**, que tienen un papel esencial en los estudios curriculares (Rico, L., 1997) y de entre las que destacamos la que atiende a *consideraciones epistemológicas y fenomenológicas sobre el conocimiento matemático en el marco de una intencionalidad didáctica*, y en la delimitación y análisis de una **red de relaciones** entre dichas componentes (figura 2) (González, J. L.; Flores, P.; Pascual, J. R. (1994); González, J. L. (1995)); dos aspectos que no intervienen en la aproximación interdisciplinar y

que delimitan una nueva aproximación que podemos denominar “mixta” por la que se establece una parte específica previa que organice el campo de fenómenos y proporcione un marco en el que también deben tener cabida las investigaciones, los métodos y resultados de otras aproximaciones.

Podemos resumir lo tratado hasta ahora en los siguientes puntos:

- Los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas presentan aspectos generales, que forman parte también del interés de otras disciplinas, y connotaciones específicas que introducen diferencias en el modo de abordar los mismos problemas desde otros campos del saber;

- Dicha especificidad se encuentra en la intervención relevante de la Epistemología y la Fenomenología del conocimiento matemático en el marco de una intencionalidad educativa así como de sus relaciones con otros campos (idea apuntada ya por Vergnaud, G. (1990, pp. 22-23)). Cuando esto se tiene en cuenta se produce una inversión en los supuestos que consideran la Didáctica de la Matemática como una prolongación o rama especializada de la Didáctica General o de la Psicología de la Educación (Fischbein, E., 1990, pp. 6-12); el análisis de los problemas parte ahora de lo más específico, como es el conocimiento matemático, pudiéndose llegar incluso al replanteamiento de resultados establecidos desde otras aproximaciones;

- Es necesario revisar las actividades y el proceso de investigación en su concepción usual (Romberg, T., 1992, p. 51) para incluir un doble punto de vista: un enfoque genuino para fundamentar y organizar el campo (actividades 3.1, 3.2 y 3.3, figura 1) mediante un procedimiento específico y un enfoque operativo interdisciplinar posterior, en el que se aborden los aspectos puntuales que se deducen del estudio anterior mediante las estrategias y métodos usuales importados de áreas afines (actividades 5, 6 y 7, figura 1). Estos métodos son adecuados para propósitos particulares, pero no son suficientes ni prioritarios; se deben supeditar a los resultados del análisis previo indicado sobre el problema de investigación. Veamos en que consiste este análisis.

Análisis didáctico de un conocimiento matemático

En el tipo de estudios denominado *investigación secundaria o de síntesis* se han venido utilizando dos metodologías diferentes: la revisión integrativa tradicional y la revisión cuantitativa, también llamada meta-análisis⁴. Recientemente, debido a la necesidad que se detecta en numerosas investigaciones cualitativas de sintetizar e integrar un número grande de estudios, ha surgido una modalidad de síntesis denominada revisión de bibliografía multivocal o, abreviadamente, **revisión multivocal** (Ogawa y Malen, 1991). Se trata de un procedimiento de síntesis cualitativa “..dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia”. (Fernández Cano, A., 1995, pág. 175).

La revisión multivocal de un tópico se basa en los siguientes criterios, que son similares a los que se proponen para el estudio de casos (op. citada, pág. 176):

- 1).- Una clara definición del tópico a indagar, a través de: consultar múltiples fuentes; mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas; incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

- 2).- Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios: posición y certitud de la fuente (validez externa); claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna); capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

⁴ Para una confrontación de ambas metodologías, ver Fernández Cano, A. (1995, págs. 165 y sgtes.).

Del meta-análisis nos interesan particularmente los siguientes criterios:

3).- Revisar el mayor número posible de estudios; localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables; no excluir inicialmente estudios en base a su calidad; diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con la incidencia de sus resultados en el problema de investigación.

La consideración conjunta de los criterios anteriores configura un nuevo enfoque que hemos denominado **meta-análisis cualitativo**. La finalidad del meta-análisis cualitativo, como la de cualquier meta-análisis, es: “. . . la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones” (Bisquerra, R., 1989, págs. 247 - 252); la diferencia en este caso radica en el empleo de criterios que son característicos de una metodología interpretativa.

Denominamos ***análisis didáctico*** de un tópico o contenido específico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a cuatro áreas fundamentales en Educación Matemática: Historia y Epistemología, Aprendizaje y cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares.

El proceso secuenciado consta de las siguientes fases:

Primera fase.- Revisión primaria de la información en todas y cada una de las áreas, siguiendo el proceso de la figura 3 y los siguientes pasos: a) análisis y clasificación de acuerdo con los criterios establecidos; b) obtención de datos relevantes; c) análisis de las relaciones entre los datos relevantes, síntesis y conclusiones; d) conjeturas y prioridades de la investigación dentro del área en relación con el tópico; e) evaluación de la revisión por área.

Segunda fase.- Análisis de las relaciones entre áreas de acuerdo con el esquema de la figura 2 y siguiendo el siguiente procedimiento: f) estudio de las relaciones a partir de la información de los apartados c), d) y e) en cada área; g) conclusiones; h) conjeturas y prioridades; aspectos a investigar; i) resultados generales y evaluación del estudio completo.

Las figuras 2 y 3 reflejan los elementos básicos del análisis didáctico, la situación de los mismos en un proceso secuenciado, las principales fuentes de información y el tipo de análisis en cada caso. Como se aprecia en dichas figuras, se considera la combinación de los análisis epistemológicos y fenomenológicos como elementos básicos, a los que se añaden informaciones complementarias de carácter cognitivo, sociológico y curricular. A lo largo del proceso se confrontan los datos y se realiza una síntesis explicativa global, buscando una interpretación coherente con los resultados de investigaciones anteriores. Como consecuencia, se establecen prioridades de investigación, se formulan teorías, se realizan estudios empíricos y comprobaciones experimentales y se deducen consecuencias para futuros estudios. *El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio, proporcionando una síntesis que permite detectar carencias y limitaciones en los trabajos anteriores y organizar adecuadamente el desarrollo futuro de la investigación. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo así como la pluralidad de aproximaciones que se suelen encontrar en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad.*

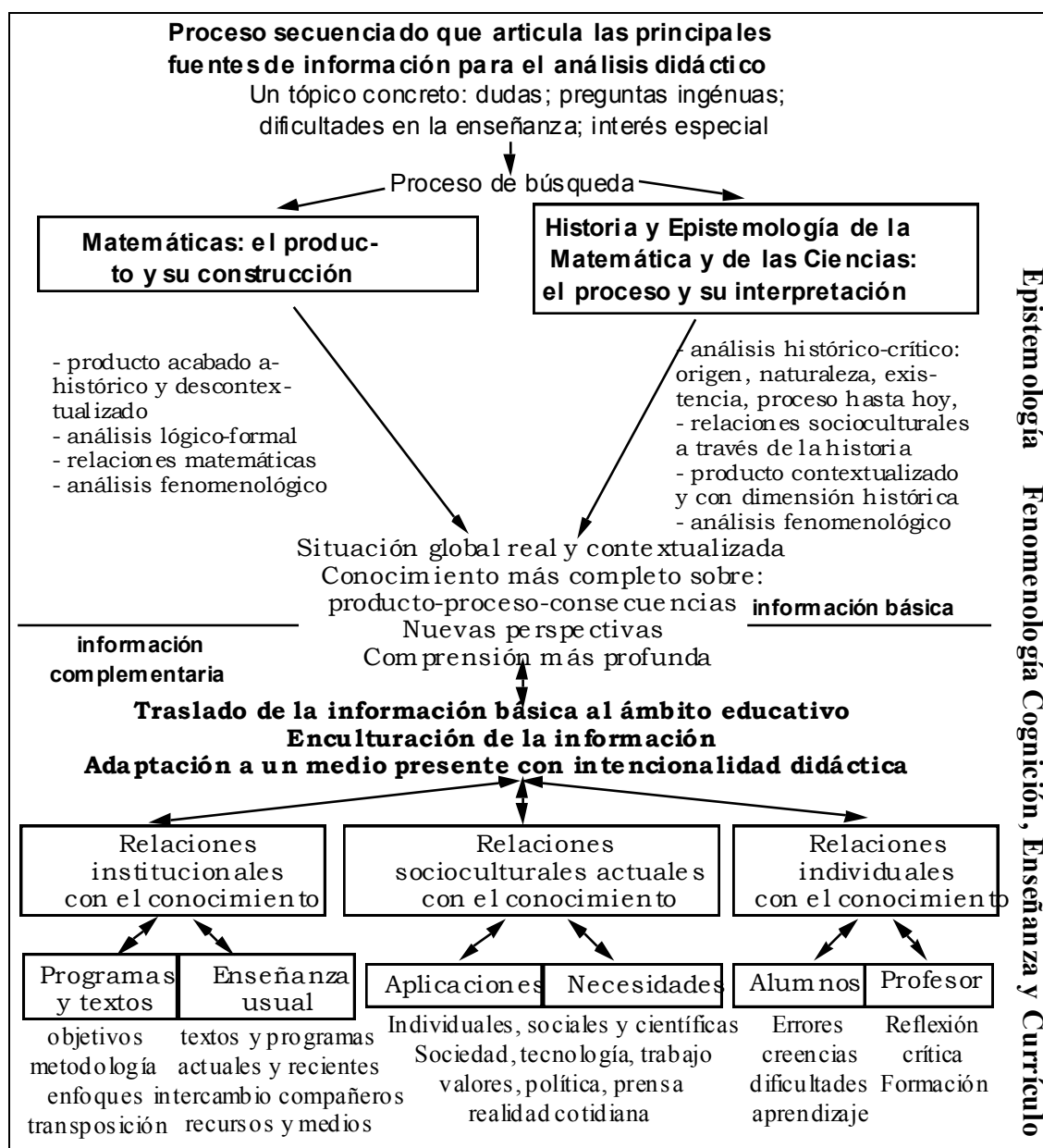


Figura 3.- Esquema de aplicación práctica del análisis didáctico de un contenido matemático.

References

- Bishop, A. J. (1992).- International perspectives on research in Mathematics Education. In: Grouws, D. A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 710-723). New York: MacMillan Publishing Company.
- Bisquerra, R., 1989, págs. 247 - 252
- Davis, P. J.; Hersh, R. *Experiencia Matemática*. Ministerio de Educación y Ciencia: Labor S. A. Madrid, 1988
- Fischbein, E., 1990. Introduction. En: Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.). *Mathematics and Cognition* (pp. 1-13). Cambridge: Cambridge University Press.
- González, J. L. (1995).- *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Colección Monografías de Investigación. SPICUM Universidad de Málaga.
- González, J. L.; Flores, P.; Pascual Bonis, J. R. (1994). Epistemología y Educación Matemática. En: Rico, L.; Gutiérrez, J., editores (1994).- *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de*

Secundaria. ICE Universidad de Granada. pp. 25-39.

- Harel y Dubinsky, 1992;

- Kilpatrick, J., 1994

- Ortiz, A. (1997).- *Razonamiento Inductivo Numérico*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

- Rico, L., 1997. Los organizadores en el currículo de Matemáticas. Cap. 2. En: Rico, L.; Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.).- Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa. Cinvestav-IPN, pp. 88-117. México, 1993.

Romberg, T. (1992).- Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: Grouws, D. A. (eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 49-64). New York: MacMillan Publishing Company.

- Romberg, Fennema y Carpenter, 1993

- Scriven, M., 1988

- Tymoczko, T. New directions in the Philosophy of Mathematics. Boston: Birkhäuser; 1986.

- Vergnaud, G., 1990. Epistemología y Psicología de la Educación Matemática. En: Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.). Mathematics and Cognition (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.