



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN EL CURRÍCULUM DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Dificultades de los escolares en la resolución de problemas aritméticos

Todos sabemos que al hablar de las operaciones aritméticas nos referimos a las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir con números naturales. Las operaciones aritméticas hacen referencia a la manipulación de cantidades y numerosidades. En concreto a acciones básicas de juntar o añadir en el caso de la suma, a quitar o completar en el caso de la sustracción, juntar cantidades iguales en el caso de la multiplicación y, por último, repartir equitativamente en el caso de la división, no siendo estas acepciones las únicas. Cuando hablemos de operaciones aritméticas en este documento nos vamos a referir a todos sus significados y a todos los niveles de representación que podamos utilizar.

Al representar las cantidades en nuestro sistema de numeración escrito podemos efectuar los cálculos sin necesidad de las numerosidades representadas, basta con un buen uso de los algoritmos correspondientes. Los materiales didácticos estructurados (ábacos, bloques multibase, regletas, etc.) están en un nivel intermedio entre las acciones contextualizadas en situaciones cotidianas y los algoritmos aritméticos de lápiz y papel. El niño al manipular los objetos que le rodean y en concreto numerosidades o colecciones, va interiorizando las acciones que dan sentido a las operaciones de la aritmética elemental. A partir de las acciones y el lenguaje el niño puede verbalizar y hacer referencia a las mismas con determinados verbos de acción. El niño manifiesta competencias en sumar al juntar dos colecciones y saber el total contando los objetos de la colección obtenida. Cuando el profesor comienza la enseñanza de los primeros números y la operación de sumar da por hecho que sus alumnos poseen competencias como la anterior. La realidad es que estas competencias son el logro de varios años y muchos niños en los inicios de la Educación Primaria no las tienen al nivel deseado. Ello dificulta en los escolares la comprensión del funcionamiento y el significado de materiales didácticos estructurados como el ábaco, los bloques multibase o las regletas de Cuisenaire. Al hablar de comprensión no nos referimos al logro de la operatividad con el material didáctico lo cual es un aprendizaje memorístico y repetitivo. El niño puede contar, puede sumar dos números con el ábaco y no dar significado ni justificación a tales hechos. Más aún, el que el niño razone sobre la máquina de calcular diciéndonos como funciona no es suficiente y el profesor no debe conformarse. Con ello solo se queda al nivel de los algoritmos en un sistema de representación. El niño a medida que realiza un algoritmo puede ir explicando con el material estructurado lo que está haciendo por haberlo aprendido. Pero, aprender no es comprender. No es objeto de la enseñanza de la matemática aprender como funcionan las regletas o el ábaco. Si el

niño nos explica con un material determinado un algoritmo conseguimos que para él tenga una explicación, lo que significa un paso importante hacia las operaciones aritméticas en su sentido algorítmico.

Atrás han quedado los significados de las operaciones en contextos cotidianos del entorno del niño. En la enseñanza de las operaciones aritméticas debemos conseguir que el niño las identifique o las asocie con determinadas transformaciones que se producen en su contexto. Ante una situación problemática contextualizada en la que intervengan cantidades el escolar debe utilizar las operaciones para resolver adecuadamente el problema que se le plantea. En la enseñanza el profesor utiliza ciertos contextos cercanos al niño como pueden ser la tienda o un juego de ganar y perder, debemos intentar que el niño resuelva situaciones en contextos de aprendizaje y que también resuelva situaciones en contextos de aplicación. Debemos conseguir que el niño pueda producir una transferencia de sus aprendizajes a nuevas situaciones. Para que un aprendizaje sea significativo para el escolar debe resolverle situaciones que le son propias.

Además debemos conseguir en los escolares de Educación Primaria un aprendizaje de la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal. El niño debe leer el enunciado del problema y determinar una estrategia de resolución usando las operaciones y cálculos adecuados.

En definitiva, y en grandes líneas, podemos decir que las operaciones aritméticas en Educación Primaria se trabajan a tres niveles que deben estar ingratos en el niño: nivel algorítmico, nivel cotidiano y resolución de problemas aritméticos. De acuerdo con las orientaciones oficiales podemos considerar que las operaciones aritméticas, sus algoritmos y sus aplicaciones a la resolución de problemas serán entendidos como dimensiones de un mismo conocimiento, por lo que a la hora de trabajar con los escolares deben ser abordados simultáneamente en lo posible.

Operaciones aritméticas en Educación Primaria Contenidos y orientaciones para un primer nivel de planificación curricular

De los seis núcleos en que están divididos los contenidos de matemáticas en las orientaciones oficiales (anexos al decreto 105/92, de Junio de 1992), el tercero de ellos trata de las operaciones (págs. 170-172).

Tal y como nosotros hemos insistido en la introducción anterior en el decreto también se hace referencia al hecho de que la comprensión de las operaciones va más allá de la constatación empírica de sus resultados.

En relación a las operaciones aritméticas con números naturales comenta los siguientes apartados:

- Las operaciones como combinación de acciones de las que resultan transformaciones cuantitativas.
- Representación matemática de situaciones, utilizando diferentes signos y códigos y estableciendo relaciones entre ellos.

- Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir. Contextualización y uso funcional de estos conocimientos
- El sistema decimal como estructura numérica. Detección y análisis de relaciones entre los números
- Conocimiento y utilización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.
- Identificación, formulación, y resolución de problemas relacionados con las operaciones.

Las operaciones del sujeto son el resultado de la interiorización de acciones que el propio sujeto ha realizado en el medio que le rodea. Cuando estas acciones son realizadas sobre cantidades discretas o continuas y se hacen reversibles (el niño coordina aumento-disminución, separar-juntar, añadir-quitarse, etc.) el niño desarrolla una lógica de las acciones sobre cantidades que lleva implícita la conservación. Así el niño construye esquemas que le posibilitan interpretar la acción contraria; descomponer una acción en otras más elementales; ver que distintas acciones pueden llevarle a un mismo resultado; distinguir el estado inicial, el estado final y estados intermedios; sustituir una acción por otra que le equivalga; compensar acciones, etc..

Cuando el niño proyecta sobre el medio su lógica de acciones interiorizadas manifiesta competencias que de otra manera no sería posible. Hay que considerar que los logros en la acción no se manifiestan de inmediato al nivel de representaciones externas como el lenguaje o la simbolización matemática. Lograr estas manifestaciones y sus usos es el objetivo de las operaciones aritméticas en Educación Primaria.

Cuando el niño manipula una cantidad puede realizar distintos tipos de transformaciones sobre la misma. Hemos de distinguir entre transformaciones cualitativas y cuantitativas. Las transformaciones cualitativas hacen referencia a modificaciones que no afectan a la cantidad: distribuir la cantidad en fila, en grupos, etc. Cuando se modifica la cantidad diremos que la transformación es cuantitativa: aumentar, agregar, etc. Tal y como hemos explicado en la introducción de este documento las transformaciones cuantitativas nos llevan a las operaciones aritméticas.

La pregunta es: ¿Qué importancia tienen las transformaciones cualitativas?. Su importancia es vital para una comprensión de nuestro sistema de representación y los algoritmos de las operaciones. Cuando un niño tiene que sumar dos cantidades las debe expresar en nuestro sistema de representación que indica una manera particular de organizar las cantidades a sumar (se agrupan en unidades, decenas, etc. y el orden de los dígitos representa como quedan agrupadas las dos cantidades), debe comprender que solo puede sumar cantidades homogéneas (peras con peras, manzanas con manzanas, o bien, decenas con decenas, centenas con centenas, etc., barras con barras, placas con placas, etc.), el llevarse es el resultado de una transformación cualitativa en la que diez unidades de un orden se sustituyen por una cantidad equivalente que es una unidad de orden superior, etc..

El signo igual (=) representa tanto transformaciones cualitativas como cuantitativas según el nivel de representación que utilizemos. Al indicar que cinco es lo mismo que cuatro más uno o la mitad de diez predomina el aspecto cualitativo; hemos realizado una comparación de cinco en dos universos semánticos diferenciados. En cambio al decir que treinta y dos más cuarenta y cinco es igual a setenta y siete, hacemos un uso cuantitativo del signo igual. Al realizar un cálculo mental disponemos las cifras mediante descomposiciones y agrupaciones que nos posibilitan realizar la operación

deseada. Estas transformaciones las podemos expresar utilizando el signo igual. Las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva, etc. se basan en transformaciones cualitativas y todas ellas se expresan con el signo igual.

Para un niño el signo igual puede indicar una orden para realizar una tarea (El niño si ve escrito $2 + 3$ no actúa, pero si ve $2 + 3 =$, es posible que escriba 5), que no es una significación matemática.

Las operaciones aritméticas en Educación Primaria **Contenidos y orientaciones para un primer nivel de planificación curricular**

Primer curso (6-7 años)

- Suma y diferencia con números de dos cifras (llevando y sin llevar). Sumas de dos o más sumandos en disposición tanto vertical como horizontal.
- Construir tablas de sumar, tablas seriadas y series.
- Cálculo mental.
- Problemas: Sacados a partir de situaciones problemáticas vivenciadas. Es importante el dominio por parte de los niños del lenguaje y términos utilizados en los enunciados (términos tales como más que, menos que, mayor, menor, doble, triple, etc.) viendo su relación con las operaciones aritméticas elementales.

Segundo curso (7-8 años)

- Sumas y diferencias con números mayores que 100. Automatización.
- Propiedades conmutativa y asociativa de la suma. (El escolar debe interiorizarlas a partir de situaciones reales)
- Producto de números naturales como suma de sumandos iguales. Su símbolo.
- Automatización hasta productos de un número de tres cifras por otro de una.
- Propiedad conmutativa del producto.
- Divisiones sencillas de números naturales. Su símbolo.
- Divisiones exactas e inexactas.
- Sentido operativo de términos tales como doble, mitad, triple y tercio.
- Construir tablas de multiplicar, tablas seriadas con doble, triple y productos sencillos. Progresiones geométricas.
- Multiplicación por 10 y 100. (Por la unidad seguida de ceros).
- Cálculo mental.
- Problemas vivenciados y de enunciado verbal en relación con los contenidos expuestos.

Tercer curso (8-9 años)

- Sumas, diferencias y productos con números mayores que 1000. Automatización.
- Divisiones exactas e inexactas o con resto. Dividendo con más de dos cifras y divisor con una cifra
- Propiedades conmutativa y asociativa de la suma. Uso de paréntesis.

- Nomenclatura de los términos de una operación: suma (sumandos), diferencia (minuendo y sustraendo); producto (factores); división (dividendo, divisor y resto)
- Prueba de la resta
- Tablas de multiplicar. Tabla pitagórica.
- Propiedad distributiva de la multiplicación. Multiplicación por decenas, centenas y millares. (Ejercicios del tipo $3 \times 400 = 3 \times 4 \times 100 = 12 \times 100 = 1200$)
- Cálculo mental con problemas sencillos.
- Problemas de compra y venta
- Problemas aritméticos con más de una operación o de dos etapas. Utilizar los términos mitad, tercio, cuarto, doble, triple, etc..

Cuarto curso (9-10 años)

- Suma y resta de números naturales. Propiedades. El alumno automatizará estas operaciones, comprenderá sus propiedades algebraicas así como los efectos producidos en los resultados al aumentar o disminuir los números con los que se opera.
- Sumas y restas combinadas: el paréntesis.
- Suma y resta como operaciones inversas.
- Multiplicación: propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, elemento neutro y absorbente ($a \times 0 = 0$).
- Producto por la unidad seguida de ceros.
- Automatismo de la multiplicación.
- Algoritmo de la división con divisores de dos o tres cifras.
- Propiedades de la división (al multiplicar o dividir dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero si el resto)
- Multiplicación y división como operaciones inversas.
- Iniciación al uso de paréntesis con todas las operaciones.
- Problemas combinados con más de una operación. (Se pueden utilizar para que el niño descubra algunas de las propiedades de las operaciones).
- Iniciación a problemas aritméticos en contextos numéricos y aritméticos (calcular un número que cumple unas características: sus cifras suman doce, es par menor que 20, etc. Calcula un número que es la mitad de veinte, más dos))
- Cálculo mental

Quinto curso (10-11 años)

- Definiciones y propiedades semiformalizadas de la suma, sustracción, multiplicación y división. (Enunciado verbal y ejemplos de las mismas).
- Desarrollo de expresiones numéricas con paréntesis.
- Prueba de la división.
- Automatismo de la multiplicación y división
- Problemas aritméticos con operaciones combinadas.
- Problemas en contextos aritméticos.
- Cálculo mental.

Sexto curso (11-12 años)

- Definiciones y propiedades semiformalizadas de la suma, sustracción, multiplicación y división.
- Iniciación a una representación algebraica de las propiedades de las operaciones ($a + b = b + a$. etc.)
- Automatismo de la multiplicación y división
- Desarrollo de expresiones numéricas con paréntesis
- Operaciones combinadas sin paréntesis: prioridad de las operaciones.
- Resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con operaciones combinadas
- Problemas en contextos numéricos y aritméticos.

Dificultades en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal

Las dificultades en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) fueron investigadas en la década de los 80. En este apartado exponemos algunos resultados en relación a las operaciones aritméticas

Dificultades en problemas de una etapa con la suma y resta

Según Puig (1988) , en escolares de 1º a 3º de Educación Primaria se han obtenido los siguientes resultados:

- Cuando la solución del problema alude al resultado de sumar o restar es más fácil que cuando alude a un término (sumando, minuendo o sustraendo). Es más fácil cuando el problema es directo y basta con sumar o restar los datos sin necesidad de invertir la operación: $a + b = ?$; $a - b = ?$
- Los problemas de sustracción son más difíciles que los de adición.
- No hay diferencia de dificultades cuando se le presenta al escolar alguna de las siguientes situaciones: $a + ? = c$; $? + b = c$; $a - ? = c$.
- Cuando aparece una proposición de minuendo desconocido ($? - b = c$) es significativamente más difícil que todas las otras posibilidades con la sustracción.
- Las proposiciones con la operación en el lado derecho del signo igual ($c = ? + b$, etc.) son más difíciles que las paralelas con la operación a la izquierda.

Dificultades sintácticas

Los estudios sintácticos tratan de predecir la dificultad del problema en función a un conjunto amplio de variables tales como: formato de presentación del problema, la longitud del enunciado, su estructura gramatical, la posición de la pregunta en el enunciado -al principio o al final, la presencia o no de datos en la pregunta, el tamaño de los números y el orden de presentación de los datos.

- La presencia de dibujos, grabados o materiales concretos, facilita la resolución en niveles elementales
- La longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta influyen en la dificultad para los alumnos.
- El tamaño de los números y la presencia de símbolos en vez de números concretos incrementan la dificultad del problema.
- La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden de su uso a la hora de resolver el problema influye en los resultados obtenidos.

Dificultades semánticas

Recordar que la componente semántica de un PAEV pueden venir dadas por siete tipo de palabras (Puig, 1989): Argumentos, adjetivos, agentes, localización, tiempo, verbos, términos relacionales.

Desde la perspectiva de las transformaciones en problemas de una etapa distinguimos tres categorías: cambio, combinación y comparación. Además podemos añadir una cuarta categoría: igualación. También nos encontramos con problemas híbridos con características propias de más de una categoría.

- Globalmente el orden de dificultad es: Cambio, combinación, comparación.
- En los problemas de resta combinar es más difícil.

Dificultades en problemas de una etapa con la multiplicación y la división

- Resulta más fácil a los escolares identificar la operación en el caso de la división que en el caso de la multiplicación.
- Dentro de los modelos de multiplicación el más difícil es el producto cartesiano.
- Básicamente se distinguen tres categorías semánticas: isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas. Los problemas de isomorfismo de medida son más fáciles
- En cuanto a las dificultades sintácticas nos podemos remitir a las expuestas en las operaciones de suma y resta