

# **PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS DE ENUNCIADO VERBAL**

**PAAEV**

# PROBLEMA DE ARITMÉTICA

- ❖ **situación real o ficticia**,
- ❖ que puede tener interés por sí misma,
- ❖ que involucra cierto grado de **incertidumbre**,
- ❖ cuya clarificación requiere la actividad mental y manifiesta de un sujeto (**resolutor**),
- ❖ a lo largo de un proceso (**resolución**) en el que intervienen conocimientos aritméticos,
- ❖ que finaliza cuando aquél encuentra la **solución** o disminuye la incertidumbre inicial y da por acabada la tarea

(más información en documentos)

# TIPOS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS (PUNTO DE VISTA ESCOLAR)

- **NO VERBALES (EN CONTEXTO)**  
(PAANV) (Problemas aritméticos aditivos no verbales)
- **VERBALES O DE ENUNCIADO VERBAL**  
(PAAEV) (problemas aritméticos aditivos de enunciado verbal)

# PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS NO VERBALES (EN CONTEXTO)

- **REALES (AUTÉNTICOS)** Ejemplo?
- **SITUACIONES SIMULADAS** Ejemplo?  
(CREADAS «AD HOC»)
- **LÚDICOS** Ejemplo?  
(JUEGOS Y PASATIEMPOS)
- **MANIPULATIVOS / CONSTRUCTIVOS** Ejemplo?  
(MATERIAL DIDÁCTICO, MANUALIZACIONES)

# PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS DE ENUNCIADO VERBAL (PAAEV) (por la estructura)

- ***PROBLEMAS ESCOLARES ESTÁNDAR***

(ejercicios en contextos relatados o en forma de historias, requisito: comprensión lingüística, situaciones artificiales (contexto forzado o familiar adaptado para actividad escolar))

- ***PROBLEMAS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA***

(no cumplen alguna de las condiciones habituales de los problemas escolares usuales)

# PAAEV ESCOLARES ESTÁNDAR

- DEFINICIÓN. EJEMPLOS
- COMPONENTES (Puig, 1988)
  - ESTRUCTURA LÓGICA
  - ESTRUCTURA DE CANTIDADES
  - **ESTRUCTURA SINTÁCTICA**
  - **ESTRUCTURA SEMÁNTICA**
- CLASIFICACIONES DE LOS PAAEV.

# Componente Sintáctica

Se puede realizar un análisis sintáctico de un PAAEV escolar examinando cada una de las variables siguientes:

- El tamaño del enunciado.
- La complejidad gramatical.
- La forma en como se presentan los datos: símbolos, palabras, números, dibujos.
- La situación de la pregunta.
- El orden de presentación de los datos.
- Errores en la concordancia de las frases.
- Errores ortográficos.
- Etc.

# Componente Semántica

Según los significados de las operaciones un PAAEV de una sólo operación o etapa puede ser de:

- **TRANSFORMACIÓN / CAMBIO**
- **COMPOSICIÓN O COMBINACIÓN**
- **COMPARACIÓN**
- **IGUALACIÓN**
- **HÍBRIDOS**

Cuando hay más de una operación o etapa (problemas de varias etapas) se han de combinar las categorías anteriores



# Problemas de transformación o cambio

una **cantidad inicial** es sometida a una acción directa aditiva o sustractiva (**transformación o cambio**) que la modifica y la transforma en la **cantidad final**.

Otros autores como Vergnaud, califican a estos problemas con la etiqueta de ETE: **estado-transformación-estado**.

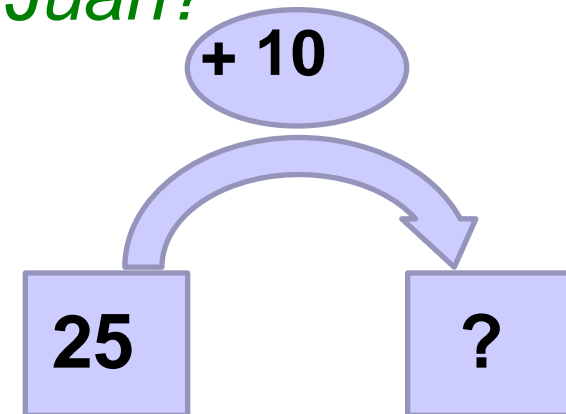
Ejemplo:

*“Juan tenía 25 canicas y su hermano le regaló 10 canicas más ¿Cuántas canicas tiene Juan?”*

*Estado inicial: 25 canicas*

*Transformación: 10 canicas*

*Estado final : valor a calcular*



# 6 TIPOS de Problemas de transformación o cambio

	C.Inicial	Cambio	C. Final	Creecer	Decrecer
CAMBIO 1	d	d	i	*	
CAMBIO 2	d	d	i		*
CAMBIO 3	d	i	d	*	
CAMBIO 4	d	i	d		*
CAMBIO 5	i	d	d	*	
CAMBIO 6	i	d	d		*

# Problemas de composición o combinación

- Dos medidas o estados absolutos se componen para dar lugar a una medida mayor

**¿Ejemplo?**

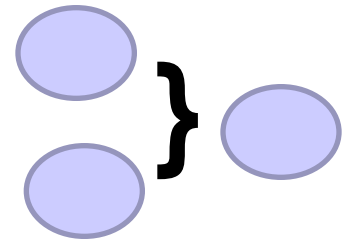
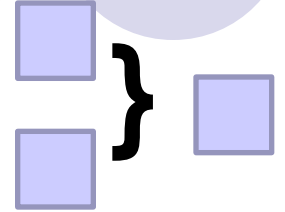
- Dos medidas o estados relativos se componen para dar lugar a una medida o estado relativo resumen

**¿Ejemplo?**

- Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación resultante

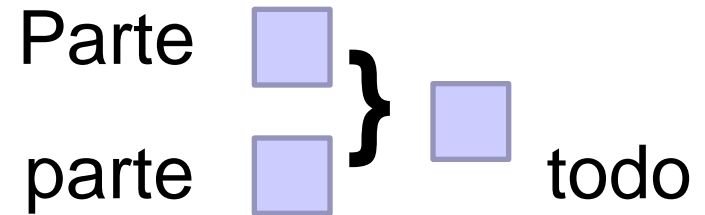
**¿Ejemplo?**

- Los problemas de combinación más habituales en primaria son los que afectan a estados o medidas absolutas (esquema parte-parte-todo)



# Tipos de Problemas de composición o combinación

Como la pregunta del problema puede suponer conocer el todo o una de las partes, nos encontramos con dos tipos de problemas de combinación.



	<b>Parte</b>	<b>Parte</b>	<b>Todo</b>
<b>COMBINAR 1</b>	<b>d</b>	<b>d</b>	<b>i</b>
<b>COMBINAR 2</b>	<b>d</b>	<b>i</b>	<b>d</b>

## Analiza semánticamente los siguientes problemas

- “Felipe tiene 14 canicas en un bolsillo y 12 canicas en el otro ¿Cuántas canicas tiene Felipe en total?”
- “Andrés recibió en su cumpleaños 13 € de sus abuelos y 25 € de sus tíos ¿Cuántos euros recibió en su cumpleaños Andrés?”
- “Roberto tenía 24 cromos y regaló 14 a su hermano ¿Cuántos cromos tiene Roberto?”

# Problemas de Comparación

presentan una relación estática de comparación entre dos medidas.

***“Remedios tiene 12 años y tiene 4 años más que su hermano Andrés ¿cuántos años tiene Andrés?”***

- **Cantidad Referencia:** los años de Andrés
- **Cantidad Comparada:** 12 años de Remedios
- **Diferencia:** Remedios tiene 4 años más que Andrés.

# Tipos de Problemas de Comparación

	<b>Referencia</b>	<b>Comparada</b>	<b>Diferencia</b>	<b>Más</b>	<b>Menos</b>
<b>Comparar 1</b>	<b>d</b>	<b>d</b>	<b>i</b>	<b>*</b>	
<b>Comparar 2</b>	<b>d</b>	<b>d</b>	<b>i</b>		<b>*</b>
<b>Comparar 3</b>	<b>d</b>	<b>i</b>	<b>d</b>	<b>*</b>	
<b>Comparar 4</b>	<b>d</b>	<b>i</b>	<b>d</b>		<b>*</b>
<b>Comparar 5</b>	<b>i</b>	<b>d</b>	<b>d</b>	<b>*</b>	
<b>Comparar 6</b>	<b>i</b>	<b>d</b>	<b>d</b>		<b>*</b>

# Problemas de Igualación

- Los podemos considerar como híbridos de los problemas de cambio y de comparación, pues suponen una acción (cambio) y una comparación con el fin de igualar dos cantidades.
- Caracteriza a estos problemas la estructura:  
“.....debo añadir..... para tener igual que....”
- *Juan tiene 6 canicas y Ana tiene 15.  
¿Cuántas canicas debe ganar Juan para tener tantas como tiene Ana?*



# Tipos de Problemas de Igualación

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
<b>Igualar 1</b>	d	d	i	*	
<b>Igualar 2</b>	d	d	i		*
<b>Igualar 3</b>	d	i	d	*	
<b>Igualar 4</b>	d	i	d		*
<b>Igualar 5</b>	i	d	d	*	
<b>Igualar 6</b>	i	d	d		*

## Otros híbridos La clasificación anterior no es completa

En un autobús van 29 personas. En una parada bajan 8 personas. ¿ Cuántas personas quedan en el autobús?

En un autobús viajan 20 personas, 8 de ellas son mujeres. ¿ Cuántos hombres van en el autobús?

En un autobús van 29 personas de las que 8 son mujeres y el resto hombres. En una parada bajan las 8 mujeres. ¿ Cuántos hombres quedan en el autobús?

# Creencias incorrectas usuales de los alumnos de Primaria sobre los problemas rutinarios escolares de aritmética

---

- Todo problema tiene una solución
- Hay una única y precisa solución numérica para cada problema
- La solución se obtiene aplicando una o varias operaciones aritméticas encadenadas
- Todos los números que figuran en el enunciado deben ser empleados en los cálculos

# PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

- DEFINICIÓN Y EJEMPLOS
- ALGUNAS CARÁCTERÍSTICAS
- UTILIDAD E IMPORTANCIA
- TIPOS Y EJEMPLOS

# PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: definición

- **Problemas auténticos y verosímiles sobre situaciones reales o realistas en las que se destaca el uso funcional del conocimiento matemático**
- **Se mezcla la misma cantidad de agua a  $40^{\circ}$  y a  $60^{\circ}$ . ¿cuál será la temperatura que alcanza la mezcla?**
- **Pizzas de dos tamaños y precios**
- **Fiesta a la que asisten los amigos míos y los amigos de mi hermano**
- **Problemas de cambio de moneda**
- **Interpretar una factura, un precio o un cambio de tarifa o un presupuesto**

# Algunas características

- **SITUACIÓN : EVENTOS CONOCIDOS, CON SENTIDO REAL**
- **PREGUNTA O INTERROGANTE FINAL: LÓGICA Y COHERENTE**
- **INFORMACIÓN / DATOS: REPRESENTATIVOS Y CREÍBLES, INSUFICIENTES, SOBREABUNDANTES, INNECESARIOS, . . .**
- **ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN: MÚLTIPLES, DE PENSAR**
- **SOLUCIÓN: MÚLTIPLES POSIBILIDADES, INCLUIDA LA AUSENCIA DE SOLUCIÓN**
- **RESPUESTAS DEL SUJETO: REALISTAS, NO RUTINARIAS**
- **CAPACIDADES Y DESTREZAS: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN, DE LA SOLUCIÓN, MATEMÁTICAS Y REALIDAD, ETC.**

# Utilidad formativa



- Favorecer la reflexión y los procesos complejos de pensamiento en situaciones verosímiles cercanas a la experiencia
- utilidad vida cotidiana
- necesidades de comunicación (interpretación e intercambio)
- cuestionamiento crítico / ciudadanía activa (“**más difícil de engañar**”)
- comprender la utilidad profunda de las matemáticas(GPS, modelos económicos, etc.)
- . . .

# Algunos tipos de problemas no rutinarios o de modelización matemática

## ● **modelización matemática elemental**

Tareas simples para principiantes:

- Problemas que omiten información relevante
- Problemas con soluciones múltiples
- Problemas sin solución
- Problemas cuya solución no requiere cálculos
- Problemas que incluyen datos irrelevantes o información superflua



# Algunos tipos de problemas no rutinarios o de modelización matemática

- **modelización matemática moderada o intermedia**

- interpretación (interpretar un resultado o un grafico)
- validación (revisar y validar críticamente un resultado)
- modelización elemental

- **modelización matemática avanzada**

# Errores y dificultades en los problemas aditivos

Estudio de las proposiciones abiertas subyacentes  
(esquema de la estructura del problema)

Estudio de las dificultades sintácticas

Estudio de las dificultades semánticas

# Estudios de las proposiciones abiertas subyacentes



$a + b = ?$	$? = a + b$
$a + ? = c$	$c = a + ?$
$? + b = c$	$c = ? + b$
$a - b = ?$	$? = a - b$
$a - ? = c$	$c = a - ?$
$? - b = c$	$c = ? - b$

## Carpenter y Moser aportan los siguientes datos sobre los niveles de dificultad correspondientes a esta tipología de proposiciones.

- 1.- Las proposiciones canónicas de adición y sustracción ( $a + b = c$ ,  $a - b = c$ ) son **más fáciles** que las no canónicas ( $a + c = b$ ,  $a - c = b$ ).
- 2.- Las proposiciones canónicas de sustracción son generalmente **más difíciles** que las de adición.
- 3.- **No hay diferencias** claras de dificultad entre las tres proposiciones siguientes:  $a + c = b$ ,  $c + b = a$ ,  $a - c = b$ .
- 4.- La proposición de minuendo desconocido ( $c - b = a$ ) es significativamente **más difícil** que las otras cinco proposiciones de sustracción.
- 5.- Las proposiciones con la operación en el lado derecho del signo igual (por ejemplo,  $c = a + b$ ) son significativamente más difícil que las paralelas con la operación a la izquierda.

## Dificultades sintácticas

- 1.- Cuando los problemas verbales se presentan por medio de **grabados, dibujos o materiales concretos**, resultan más sencillos, al menos en los primeros niveles.
- 2.- La **longitud del enunciado**, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta son variables, así como otras de la estructura superficial del problema son fuentes de dificultad añadidas al problema.
- 3.- El **tamaño de los números** y la presencia de símbolos incrementan la dificultad del problema.
- 4.- La relación entre **el orden de aparición** de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos las operaciones para resolver el problema es también una fuente de dificultad.

# Dificultades Semánticas

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de soluciones correctas a los problemas de las distintas categorías semántica.

Porcentaje de éxito de 14 tipos de PAE aditivos en dos estudios empíricos

	<i>Nesher (1982)</i>	<i>Riley y otros (1983)</i>	
	2.º-6.º	1.º	2.º
Combinar 1	79	100	100
Combinar 2	52	39	70
Cambio 1	82	100	100
Cambio 2	75	100	100
Cambio 3	72	56	100
Cambio 4	77	78	100
Cambio 5	48	28	80
Cambio 6	49	39	70
Comparar 1	76	28	85
Comparar 2	66	22	75
Comparar 3	65	17	80
Comparar 4	66	28	90
Comparar 5	60	11	65
Comparar 6	54	6	35

Con este y otros estudios similares Riley y otros han elaborado cuatro niveles de dificultad en los que se encuadran estas clases de problemas:

Tabla 4

<i>Tipo de problema</i>	<i>Nivel 1</i>	<i>Nivel 2</i>	<i>Nivel 3</i>	<i>Nivel 4</i>																																																				
Combinar 1 Combinar 2	×		×																																																					
Cambio 1 Cambio 2 Cambio 3 Cambio 4 Cambio 5 Cambio 6	×	×					×					×						×					×		Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×	
		×					×						×					×		Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×						
		×						×					×		Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×											
			×					×		Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×																
			×		Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×																					
Comparar 1 Comparar 2 Comparar 3 Comparar 4 Comparar 5 Comparar 6			×					×					×					×						×						×																										
			×					×					×						×						×																															
			×					×						×						×																																				
			×						×						×																																									
				×						×																																														
				×																																																				

\* En algunas muestras estos problemas estaban en el nivel anterior.