

EL APRENDIZAJE DE LOS NUMEROS Y EL CÁLCULO NUMÉRICO. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS, FRACCIONARIOS y DECIMALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN. RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS. OPERACIONES DE CÁLCULO Y PROCEDIMIENTOS DEL MISMO (CÁLCULO ESCRITO, MENTAL, ESTIMACIÓN Y CALCULADORA). INTERVENCIÓN EDUCATIVA.

(FUENTES: ASIGNATURA 2º PRIMARIA, BIBLIOGRAFÍA Y DOCUMENTOS GONZÁLEZ, J. L.)

GUIÓN – ESQUEMA

I. INTRODUCCIÓN

II. EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS Y EL CÁLCULO NUMÉRICO

II.1) Importancia y utilidad de la numeración y las operaciones aritméticas

- En la vida actual: utilidad individual, social, etc.; Usos del número: contar, numerar, medir, operar y ordenar. Valor formativo y funcional

II.2) Los números y las operaciones aritméticas en el currículo de Educación Primaria

- Núcleos de interés. Principios y metas. Orientaciones oficiales: contenidos y bloques, ciclos, etc.

II.3) Consideraciones didácticas generales

- Complejidad, dificultades, errores
- Para favorecer el aprendizaje

III. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS, FRACCIONARIOS Y DECIMALES

III.A) Números naturales (los números para contar y ordenar colecciones)

III.B) Números enteros (positivos o naturales precedidos del signo +, negativos y cero)

III.C) Números fraccionarios (pares ordenados de números enteros con varios significados y que representan la división entre el primero (numerador) y el segundo (denominador)).

III.D) Números decimales (números con coma. Constan de dos partes, entera y decimal. Se utilizan para aproximar el verdadero valor de una medida no exacta y para expresar el resultado de una división entera no exacta.

IV. SISTEMAS DE NUMERACIÓN. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

V. RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS. LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS ELEMENTALES

VI.- LOS ALGORITMOS Y OTROS PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO (CÁLCULO ESCRITO, MENTAL, ESTIMACIÓN Y CALCULADORA)

VII. INTERVENCIÓN EDUCATIVA

VIII. COMENTARIOS FINALES

IX. BIBLIOGRAFÍA

X. REFERENCIAS WEB

I. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son un conjunto de saberes asociados en una primera aproximación a los números y las formas, que van configurando progresivamente un conjunto de instrumentos para el tratamiento sistemático de la **incertidumbre** genérica (la información es el elemento central), un repertorio de **posibilidades intelectuales** de actuación y un modo valioso para analizar la realidad para comprenderla, valorarla mejor y poder actuar sobre ella. Con las herramientas matemáticas podemos tener una información más rica sobre nosotros mismos y el medio que nos rodea..

La finalidad de la Educación Primaria es proporcionar a todos los niños y niñas una educación que permita afianzar su desarrollo y su propio bienestar, adquirir habilidades culturales básicas relativas a la expresión y comprensión oral, a la lectura, a la escritura y al cálculo, así como desarrollar las habilidades sociales, los hábitos de trabajo y estudio, el sentido artístico, la creatividad y la afectividad. (MEC, 2006). Asimismo, el artículo 17 de la LOE (MEC, 2006) hace referencia a las Matemáticas: "desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana".

Entre los conocimientos matemáticos elementales imprescindibles en una formación básica, los números, las operaciones aritméticas y el cálculo se sitúan en un lugar destacado, ocupando, junto a la geometría, la mayor parte del currículo de matemáticas en Primaria. Los contenidos de este núcleo de conocimientos, procedimientos y destrezas se sitúan, de acuerdo con la Orden de 10 de agosto de 2007 de la Junta de Andalucía, en el *bloque disciplinar* denominado "**Sentido Numérico y medida de magnitudes**" y se encuentran relacionados especialmente con los tres *bloques transversales* "Resolución de problemas", "TIC" y "Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas".

Los siguientes apartados serán analizados con detalle en el presente tema desde el punto de vista de la planificación de la enseñanza y la intervención didácticas:

- El aprendizaje de los números y el cálculo numérico, su importancia y utilidad
- Los números naturales, enteros, fraccionarios y decimales;
- Los sistemas de numeración y la representación numérica;
- Relaciones entre los números. Las operaciones aritméticas y la resolución de problemas aritméticos;
- El cálculo aritmético, los hechos numéricos y los algoritmos y procedimientos de cálculo;

Concluiremos el tema con algunas consideraciones sobre la intervención educativa en Primaria.

II. EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS Y EL CÁLCULO NUMÉRICO

II.1) Importancia y utilidad de la numeración y las operaciones aritméticas

La construcción de la noción de número y de las operaciones que pueden realizarse con ellos, han sido y son de extraordinaria importancia para la humanidad. Los números y las operaciones aritméticas son fundamentales para el individuo, la sociedad, la ciencia y la vida cotidiana e intervienen en multitud de actividades. Gómez (1993) señala los siguientes usos para el número:

- Para contar: puede ser cardinal (tengo cinco cromos);
- Para numerar según diversos propósitos: número de niños de la clase; para ubicar (en la segunda estantería), para localizar (número de vivienda), para nominar (teléfono, matrícula);

- Para medir: describir medidas, valorar (porcentajes), asignar un número a una cantidad discreta (cardinar);
- Para operar: sumar, restar, etc.;
- Para ordenar: el primero, segundo (número ordinal).

Pero la importancia de estos conocimientos va más allá de su utilidad práctica cotidiana:

- constituyen la base para la mayoría de los conocimientos matemáticos
- son fundamentales para otros conocimientos científicos y otras disciplinas
- tienen un alto valor formativo contribuyendo al desarrollo de capacidades de alto nivel.

II.2) Los números y las operaciones aritméticas en el currículo de Educación Primaria

Los números, las operaciones aritméticas y el cálculo numérico constituyen una parte importante del currículo de Primaria. Las orientaciones oficiales se recogen en los siguientes documentos legislativos:

- LOE, MEC (2006)
- Real Decreto 1513/2006 (MEC, 2006)
- Orden de 10/08/2007 de la Junta de Andalucía de desarrollo del currículo en Educación Primaria

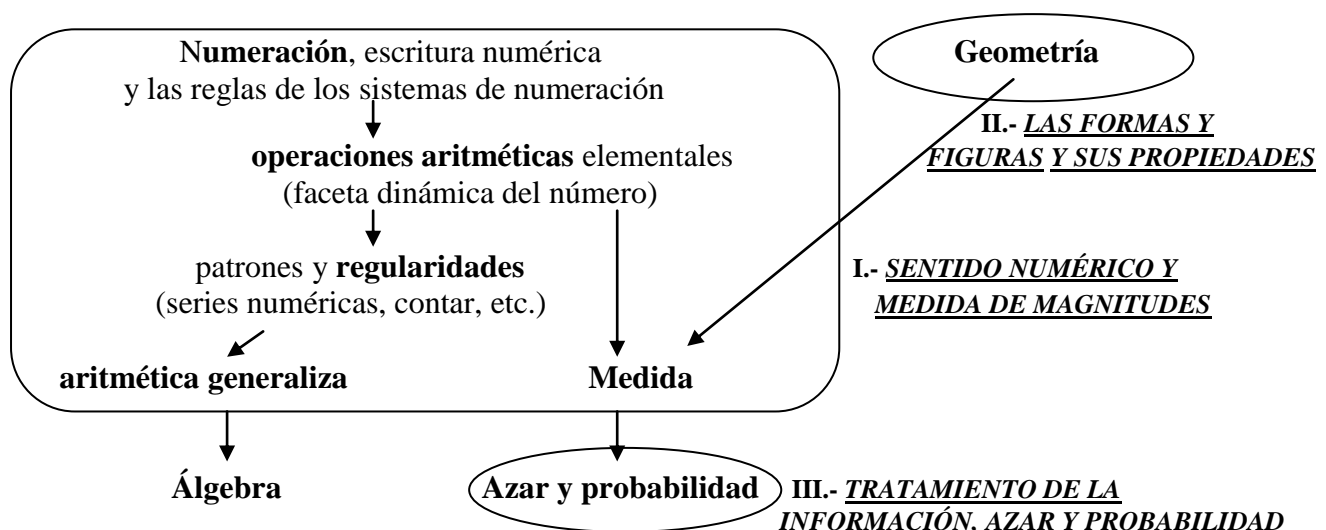
Núcleos de interés. Tres grandes temas:

- Numeración: agrupamiento, valor de posición, utilidades y significados de los números.
- Operaciones aritméticas: significados, propiedades, resolución de problemas.
- Algoritmos y cálculo numérico: hechos numéricos y estrategias, cálculo mental y estimado; si es complicado, algoritmo escrito.

Principios y metas: El alto **valor formativo y funcional** y su destacada contribución al desarrollo de las **competencias básicas y matemáticas**, confieren a estos conocimientos un destacado papel en la consecución de la **alfabetización numérica**, entendida como la capacidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático en situaciones reales o simuladas, interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones con contenido numérico y aritmético e identificar y resolver problemas, seleccionando las estrategias y las técnicas adecuadas.

Contenidos y bloques

En el Real Decreto 1513/2006, los números y las operaciones aparecen como un bloque de contenidos junto a la medida, la Geometría y el tratamiento de la información, azar y probabilidad. En la Orden de 10/08/2007 (Junta de Andalucía), los contenidos forman parte del primero de los tres bloques disciplinares: **bloque I**, “Sentido numérico y medida de magnitudes”, **bloque II**, “Las formas y figuras y sus propiedades” (Geometría) y **bloque III**, “Tratamiento de la información, azar y probabilidad”.



Los tres *bloques disciplinares* mencionados se completan con los tres *bloques transversales*:

- Resolución de problemas de matemáticas
- Uso de las TIC
- Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas

El *Sentido Numérico* se puede entender como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar mentalmente cálculos.

- Para el desarrollo del Sentido Numérico se establecen los siguientes contenidos (Real Decreto 1513/2006 (MEC, 2006)):

Primer ciclo: Números naturales (Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. Lectura y escritura de números hasta tres cifras. Orden y relaciones entre números. Números ordinales. Comparación de números en contextos familiares). Suma y resta. Multiplicación. Divisiones sencillas. Algoritmos. Propiedades. Tablas. Problemas de aplicación de las operaciones. Cálculo mental.

Segundo ciclo: Números naturales y fracciones. Sistema de numeración decimal. Lectura y escritura de números hasta seis cifras. Su uso en situaciones reales. Orden y relación entre los números. Notación. Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario adecuado. Comparación entre fracciones: mediante ordenación y representación gráfica. Suma y resta. Multiplicación. División. Algoritmos. Propiedades. Tablas. Problemas de aplicación de las operaciones. Cálculo mental.

Tercer ciclo: Números enteros, decimales y fracciones (Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras. Múltiplos y divisores Números fraccionarios, operaciones con fracciones . . Números decimales, operaciones con decimales . . Números positivos y negativos . .). Multiplicación. División. Algoritmos. Propiedades. Iniciación al álgebra. Problemas de aplicación de las operaciones. Cálculo mental.

II.3) Consideraciones didácticas generales

Complejidad, dificultades y errores:

La construcción de las nociones numéricas constituye una de las tareas más complejas en los primeros niveles educativos. El dominio del número y las operaciones requiere del desarrollo de conocimientos, capacidades y destrezas complejas relacionadas con los siguientes aspectos:

1. Comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos, lo que se puede agrupar bajo el término “**Numeración**” en dos grandes bloques precursores del campo del cálculo aritmético:
 - *Campos conceptuales numéricos*: número y cantidad; número cardinal y ordinal; composiciones numéricas (inicio a las operaciones aritméticas); números naturales, enteros, fraccionarios y decimales; significados; usos, aplicaciones y relaciones.
 - *Representaciones numéricas*: cifras; secuencia numérica; contar; unidad, decena y centena; escritura numérica: signos y reglas; sistema posicional; numeración hablada y escrita; tipos de números, etc..
2. Comprender y utilizar las “**Operaciones Aritméticas**” sobre la base de los logros del bloque anterior, lo que significa dominar los dos grandes campos siguientes:
 - a. Conceptos, significados, aplicaciones, representaciones, estructuras y propiedades de las *Operaciones aritméticas*, contemplando las situaciones en las que se aplican y la resolución de problemas aritméticos, sean o no de enunciado verbal.

- b. Conocer, comprender y desarrollar habilidades, técnicas y estrategias sobre los *Algoritmos y el cálculo aritmético*, incluido el cálculo mental, el cálculo escrito de lápiz y papel, los hechos numéricos, las tablas y el uso de instrumentos de cálculo y modelos intermedios (ábacos, calculadoras, bloques multibase, etc.)

La complejidad de los conocimientos y las características del proceso educativo ordinario provoca numerosos errores que constituyen un verdadero reto para los maestros y responsables educativos. A modo de ejemplo podemos citar, en relación con la numeración: errores habituales en lectura y escritura de números (*Escriben los números en función de cómo se nombran*: "treinta y cinco" como 305; El cero intercalado provoca dificultades; Se confunde número con su escritura; Los niños pueden saber recitar la secuencia numérica y no saber contar ni lo que significa este hecho o para que sirve; o escribir los números pero no saber que 15 representa una decena más 5 unidades.

Pero los errores se pueden disminuir o evitar con un proceso didáctico adecuado.

Para favorecer el aprendizaje (se amplía en el apartado VII)

En el proceso educativo se deben atender especialmente los siguientes aspectos:

Numeración:

- principio de agrupamiento en base 10 (Agrupación de objetos sin estructurar (bolsas, gomillas, vasos, etc.), Agrupación de objetos estructurada (ensartado, ensamblado), Material didáctico estructurado (con divisiones (bloques multibase, Montessori), sin divisiones con diferencias apreciables (regletas cuisenaire), sin divisiones ni diferencias (fichas de colores).
- Principio de posición: ábacos; ábaco plano; etc.
- Representación: Tipos y Secuencia (concreta, expandida y convencional), Recursos (Material, tarjetas), Culminación del proceso de representación. Fases: descomposiciones canónicas, descomposiciones equivalentes (mediante sumas . .), fase aritmética (algoritmos elementales)

Operaciones aritméticas: Comprensión y significados, utilidad y situaciones de aplicación cotidiana, etc.


Algoritmos: Comprensión del funcionamiento, construcción razonada y diversificada de tablas, práctica reiterada, etc.

Cálculo: Mental, estimado, aproximación, instrumentos, etc.

La enseñanza se debe basar, entre otros, en los siguientes aspectos :

- Un desarrollo didáctico en espiral, bien planificado en lo fundamental, con diversidad de experiencias y situaciones, motivador y que tenga en cuenta lo que los alumnos ya saben;
- Un proceso disciplinar ordenado en lo instrumental y globalizado e interdisciplinar/transversal en lo formativo y funcional con la modelización matemática y la resolución de problemas como ejes centrales del proceso;
- Un clima adecuado para aprender, una metodología diversificada y la devolución de la responsabilidad como núcleos del trabajo en el aula;
- La utilización reiterada de *recursos del entorno y materiales didácticos* manipulativos diseñados para favorecer el aprendizaje, como los siguientes:
 - Los bloques lógicos de Dienes: (fase prenumérica). Las piezas tienen distintos colores, formas, grosor, tamaño, etc. Hay que agrupar clasificar, seriar, etc., atendiendo a distintos criterios.
 - Números de lija (se reconocen al tacto) y Números recortables (plantilla).
 - Dominós: unir el número con los puntos de igual valor numérico.
 - Balanza de operaciones: colocar en un brazo un número y en el otro las cifras cuya suma sea ese número.
 - Bloques multibase: para comprender los sistemas de numeración, el valor de posición, las operaciones aritméticas y los algoritmos;

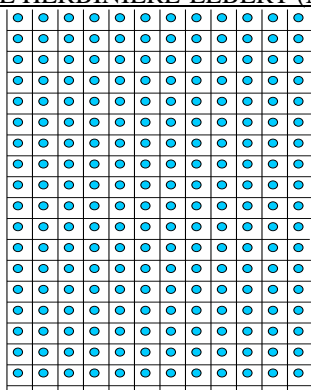


- Regletas: de Cuisenaire (diez tamaños y colores diferentes: formar series, establecer equivalencias, etc.); encajables;
- Ábacos: Soporte con varillas y ensartadas por bolas (cada una representa un orden del sistema decimal (unidades, decenas, centenas, etc.)) o ábacos planos (casillas dibujadas en lugar de varillas y cuentas, botones o fichas en lugar de bolas ensartadas). Sirven para el cálculo de operaciones aritméticas, representar números, conocer el valor de posición de un número, etc..
- Material para fracciones: Áreas incompletas y sombreado de áreas (la parte rayada representa una fracción del área total de la figura considerada como la unidad). Ej.:  (lo sombreado es 1/6 del área total); Troceado de folios; Volúmenes, capacidades (recipientes, líquidos, repartos); dominós de fracciones
- Calculadora (como herramienta auxiliar, para investigar y resolver problemas, etc.);
- Tabla 100: disposición cuadrada y ordenada de los 100 primeros números naturales en 10 filas.
Propiedades de los números, divisibilidad, las operaciones son movimientos sobre la tabla, etc.

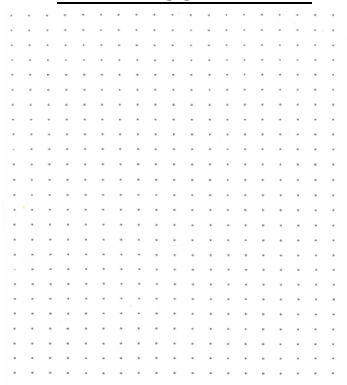


- Puntos y tramas (estructuradas o isométricas (ver muestras));

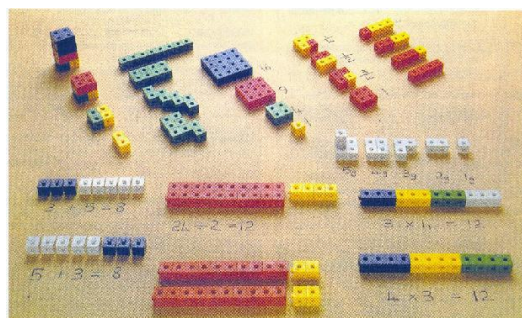
MATERIAL HERBINIERE-LEBERT (MUESTRA)



TRAMA CUADRADA

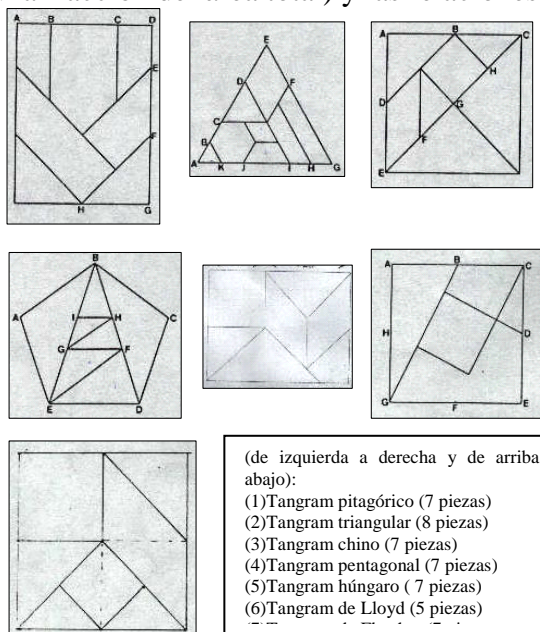


- Multicubos y policubos



- Puzzles (números y colecciones de objetos; de sumas y restas; etc.).

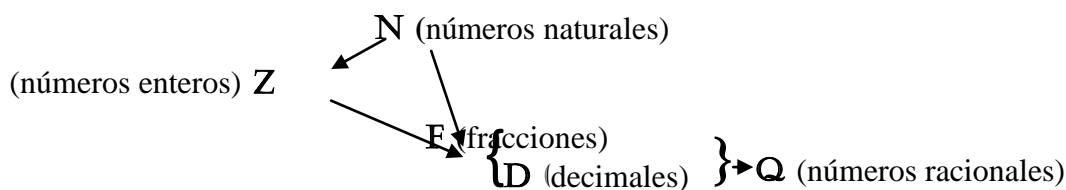
- Tangrams: material para geometría y medida pero utilizado en este caso para el concepto de fracción (las áreas constituyen una fracción del área total) y las relaciones numéricas en las piezas.



(de izquierda a derecha y de arriba abajo):
 (1) Tangram pitagórico (7 piezas)
 (2) Tangram triangular (8 piezas)
 (3) Tangram chino (7 piezas)
 (4) Tangram pentagonal (7 piezas)
 (5) Tangram húngaro (7 piezas)
 (6) Tangram de Lloyd (5 piezas)

III. NÚMEROS NATURALES, ENTEROS, FRACCIONARIOS Y DECIMALES

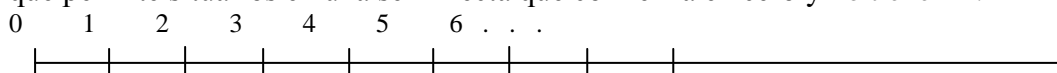
El número es un objeto matemático (idea o concepto) que presenta unas propiedades, unas formas de representación, unos modos de combinarse entre sí para generar otros números, unos campos de aplicaciones estrechamente relacionados con las magnitudes, las cantidades y las medidas y se encuentran constituyendo conjuntos con unas estructuras y propiedades determinadas. En Matemáticas existen distintos tipos de números relacionados entre sí mediante un proceso de construcción formado por sucesivas ampliaciones: los más elementales son los números naturales, entre los que se pueden realizar sin ninguna limitación las operaciones de sumar y multiplicar para dar lugar a nuevos números naturales. Pero no ocurre así con la resta y la división, puesto que no se pueden realizar operaciones como: $5 - 9$ o $7 : 3$. En consecuencia, hacen falta nuevos tipos de números para salvar estos inconvenientes: por un lado los números negativos, para poder restar cualquier par de números (ampliación de N a Z (enteros) (con lo que podemos poner: $5 - 9 = -4$)), y por otro los números fraccionarios (división indicada o fracciones) y los decimales (números con coma que resultan de dividir numerador y denominador), para poder dividir cualquier par de números (con los que podemos poner: $7 : 3 = 7 / 3 = 2,33 \dots$). Se realizan así, dos ampliaciones de los números naturales: una ampliación aditiva de los números naturales a los números enteros y otra ampliación multiplicativa de los números enteros a los números fraccionarios y decimales (dos maneras de representar los que se conocen como números racionales).



Las dos nos permiten operar a nivel elemental de todas las formas posibles sin restricciones: la primera aditivamente y la segunda aditiva y multiplicativamente. Veamos con más detalle cada uno de estos tipos de números.

III.A Números naturales

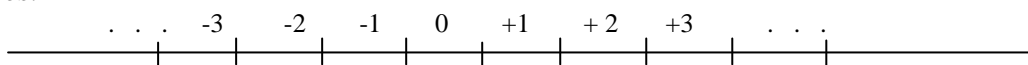
Son los números que forman parte del conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sirven para contar, asignar un valor a la cantidad de objetos separados de un conjunto (establecer el cardinal de una colección) o designar el orden en una serie discreta (establecer el orden de un elemento). Entre ellos hay definidas varias operaciones (suma, resta, multiplicación y división) y una relación de orden (menor o igual (\leq)) que permite situarlos en una semirrecta que comienza en cero y no tiene fin.



El número cero tiene algunas particularidades que lo distinguen de los demás números. Se incorporó al resto de números como primer elemento para expresar la ausencia de un determinado valor de posición. La secuencia numérica ascendente comienza en el 1, mientras que la descendente sí acaba en el cero. En el recuento usual se comienza por uno. Como cardinal el cero indica conjunto vacío. No suele usarse como número ordinal. En la antigüedad se utilizaban huecos en la escritura numérica en lugar de ceros.

III.B Números enteros

Para que sea posible la sustracción en todos los casos y se pueda cuantificar, operar y ordenar en situaciones con cantidades y medidas dirigidas (temperaturas positivas y negativas), adjetivadas (ganar, perder; subir, bajar; etc.) o con dos sentidos con un valor nulo central (tiempo antes de, después de; alturas por encima y por debajo del nivel del mar), se amplían los números naturales añadiéndoles los números negativos (naturales precedidos del signo -) y conservando todas las propiedades y operaciones definidas en \mathbb{N} . De esta manera, los naturales son ahora números positivos a los que se añaden los negativos para dar lugar a un nuevo conjunto de números, conjunto de los números enteros (positivos, negativos y el cero), que se representa por la secuencia $\mathbb{Z} = (\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots)$, cuyos elementos se pueden situar en la recta numérica sin principio ni fin y cuyas posibilidades y campos de actuación son mayores que los que tenían los números naturales.



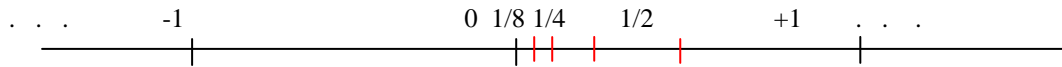
III.C Números fraccionarios

Una fracción o número fraccionario es una pareja ordenada de números enteros (Ej.: $2/3$; debe existir un orden porque $2/3$ es una fracción distinta a $3/2$); al primer número se le llama numerador y al segundo denominador (que debe ser distinto de cero porque la división por cero no está definida en estos conjuntos). La expresión a/b representa un todo o unidad que se ha dividido en **b** partes iguales y hemos seleccionado **a** de dichas partes. Ejemplo: el 75% de algo, o lo que es lo mismo, los $3/4$ de algo, indica que una unidad se ha dividido en 4 partes y hemos cogido 3 de ellas.

El concepto de **fracción** puede tener varios *significados* concretos y cotidianos: relación parte-todo, cociente indicado, razón o proporción, operador, medida, porcentaje o, simplemente, número. Situaciones cotidianas: recetas de cocina, ampliaciones o reducciones en fotografía y en fotocopidora, escalas en mapas, comprar los ingredientes en el mercado (cuarto de kilo, medio de ... , etc.) para preparar una comida para varias personas. El postre es una tarta que hay que calcular para que todos tengan una ración $x \dots$. Los cálculos del coste total entran a formar parte del tema.

El número fraccionario surge ante la necesidad de ampliación multiplicativa del conjunto de los números naturales (o los números enteros). Con los números fraccionarios o fracciones disponemos de todas las posibles parejas ordenadas de números naturales (o números enteros); dicho de otro modo, de todos los posibles cocientes que se pueden formar entre números naturales (o números enteros). De esta manera, legalizamos cualquier división entre números naturales, sea o no una división exacta. Los números naturales (o los números enteros) siguen estando en este nuevo conjunto ($1/1=1$; $2/2=2$; $-3/3=-1$; etc.) apareciendo ahora nuevos números no contemplados anteriormente (porque las divisiones daban resultados no existentes en \mathbb{N} o en \mathbb{Z} ($1/2$; $8/9$; etc.).

El panorama de puntos en la recta entera cambia ahora radicalmente, ya que entre dos números enteros hay infinitos números fraccionarios, con lo que se “llena”¹ literalmente de puntos el espacio que había entre dos números naturales o enteros (entre 1 y 2, por ejemplo, estarían todas las fracciones tales que al dividir numerador entre denominador dieran como resultado un número del tipo: 1,4567). Del mismo modo, las operaciones aritméticas y el orden en N y Z se mantienen y se amplían a los nuevos números.



Para la buena comprensión del concepto de fracción, Llinares y Sánchez (1989) destacan los puntos:

1. Unidad: identificar el número y las cantidades mayores y menores de la unidad.
2. Partes iguales de una unidad usando materiales concretos (tarta, material didáctico).
3. Dar nombres a las partes de la unidad: mitad, tercio, cuarto.
4. Representar fracciones con dibujos. Regiones sombreadas.
5. Escribir fracciones para representar partes de la unidad (2/5, 3/8)
6. Ampliar la noción para fracciones mayores que la unidad (9/4, 10/6), números mixtos (6 y 1/4), fracciones equivalentes (1/2, 2/4, etc.) y trabajar el orden entre fracciones.

III.D Números decimales

Los números decimales son los resultados de divisiones no exactas o con resto no nulo entre números enteros (los repartos equitativos no exactos no se acaban cuando ya no quedan unidades, la parte sobrante se puede seguir repartiendo adoptando unidades sucesivamente más pequeñas). Los números decimales tienen dos partes separadas por una coma: la parte entera (antes de la coma) y la parte decimal (7,35). La parte decimal está formada por cifras que representan, según la posición que ocupen, cantidades de unidades del orden correspondiente, si bien en este caso van en sentido inverso a las que se utilizan para la parte entera (unidades, decenas, centenas, etc.) (Ej.: 7,35: 7 unidades, 3 décimas y 5 centésimas; una centésima es la décima parte de una décima y la centésima parte de una unidad; a medida que la posición se aleja de la coma hacia la derecha el orden es inferior).

Se utilizan en numerosas situaciones cotidianas, como por ejemplo:

- medidas (2,65 cm), dinero (20,75 euros)
- aproximación (3,5 metros aproximadamente)
- porcentajes (el 4 por ciento es igual a un 0,04 del total).

Los números decimales constituyen una forma alternativa de representar las fracciones y son el resultado de tratar de afinar las medidas reales y disminuir los errores de medición (obtener medidas cada vez más exactas o más cercanas al “verdadero valor”).

Las fracciones y los números decimales: ¿son iguales o distintos? Una fracción es un par ordenado de números enteros. Son fracciones *distintas* aquellas que tienen alguna diferencia en las cifras de los numeradores y/o los denominadores : 2/5, 2/4, 5/2, 33/7 y 21/22. Pero también son distintas las fracciones: 1/2, 2/4, 3/6, 8/16, etc., aunque todas ellas (y todas las que resulten de multiplicar numerador y denominador de una cualquiera de ellas por el mismo número) son *equivalentes* a la primera (1/2), que se llama *fracción irreducible*. Por otra parte, a pesar de ser todas distintas por estar formadas por pares de números distintos, todas dan el mismo número decimal al dividir el numerador por el denominador (0,5). Por tanto, un número decimal es, en realidad, la propiedad común a una clase o conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a una fracción dada. Ejemplo: 3,33. . = 10/3 = 20/6 = 50/15 = . . ., “propiedad común” de los elementos del conjunto o clase: {10/3, 20/6, 50/15, . . .}. Y todo número decimal con un número de cifras decimales finito o

¹ Con más tiempo y reflexión se comprueba que este “llenado” tampoco es completo, puesto que faltan números que no se pueden poner como cociente de números naturales. Pero esta cuestión excede el nivel de este capítulo

limitado o bien infinito o ilimitado pero no periódico, representa lo que se conoce como número racional (Q).

- Fracción: $2/8$ (par ordenado de números enteros)
- Expresión decimal de la fracción $2/8$: 0,25 (número con coma que resulta de dividir)
- Número decimal $0,25 = \{1/4, 2/8, 3/12, \dots\}$ (clase de fracciones equivalentes)

IV. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

QUÉ SON Y CÓMO FUNCIONAN

El número es un concepto matemático complejo al que se pueden asociar, al menos, los siguientes aspectos:

- Concepto, definición, estructuras y propiedades (aspecto formal)
- Operaciones aritméticas y algoritmos que se pueden realizar con él (aspecto operacional)
- Significados propios de su utilidad y aplicaciones (aspecto semántico) (Ej.: el nº natural sirve para contar, codificar, etc.; el nº decimal se aplica en medidas continuas, etc.);
- Representación o modo de expresión y comunicación (aspecto sintáctico);

Cada número y cada tipo de número participa de dichas características y presenta a la vez propiedades singulares que lo diferencian del resto de números de su especie (divisibilidad, combinación de otros, paridad, nº de cifras, etc.) y de otros tipos de números (la suma es distinta en N, en Z y entre fracciones, por ejemplo).

La representación de los números se ajusta a conjuntos de signos, principios y reglas que reciben el nombre de **sistemas de numeración** o sistemas de representación numérica. Estos sistemas de representación han estado marcados históricamente por criterios de utilidad práctica y han sufrido numerosos cambios. El objetivo fundamental ha sido siempre el de describir medidas o cantidades mediante unos pocos signos y operar con ellos de la manera más sencilla posible. Los sistemas de numeración se caracterizan por los siguientes elementos: base, cifras o dígitos y principios y reglas.

El primer aspecto a tener en cuenta para representar cantidades y números es el de utilizar, por razones de economía, la menor cantidad posible de signos para representar cualquier número. Se llama **base** de un sistema de numeración al número de **signos unitarios, dígitos, cifras o símbolos** simples con cuyas combinaciones se obtienen todos los posibles números. Ejs.: el sistema binario o de base 2 permite escribir cualquier número natural (y por tanto cualquier cantidad) combinando los dígitos 0 y 1 (se utiliza en informática: 0 (no pasa corriente), 1 (pasa corriente);); el sistema de base 10 o decimal emplea los diez dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9 para representar cualquier número.

Además de la base 10, a lo largo de la **historia** se han utilizado otras bases y sistemas, como el que se emplea para la medida del tiempo (1 hora = 60 minutos, 1 minuto = 60 segundos) o la base hexadecimal (emplea los signos 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F que se utiliza en informática), etc.

El segundo aspecto a tener en cuenta es el conjunto de **principios y reglas** para la combinación de los signos básicos. Aquí podemos distinguir:

- Estructura: *Sistemas aditivos* (las cantidades se representan mediante signos cuyos valores se suman para obtener el número representado. Ej.: sistema egipcio o romano: XXV=10+10+5=25);
 - Sistemas multiplicativos* (los signos son de dos tipos: los que se repiten y los que indican las veces que se tienen que repetir los primeros. Ej. Sistema chino; nuestra numeración hablada es multiplicativa: tres miles, cuatro cientos, . . .)
 - Sistemas posicionales* (más evolucionados; cada cifra tiene dos valores, uno según su valor como cifra y otro por el lugar que ocupa en una serie de cifras ordenadas linealmente. Ejemplo: 25.346, el 5 tiene valor de cinco (valor absoluto) y de 5.000 (valor

relativo) por ocupar el lugar de las unidades de millar). Aquí aparecen las unidades de distinto **orden** en función de la posición: unidades de orden cero o simplemente unidades, unidades de 2º orden o decenas, unidades de tercer orden o centenas, etc. El sistema decimal escrito o de base 10 de la cultura occidental es posicional y los órdenes se asocian a las sucesivas potencias de la base (10).

- Principios (en sistemas posicionales como el decimal):
 - Agrupamiento: Cada unidad de un orden equivale a x unidades del orden inferior (diez en nuestro sistema): 1 decena = 10 unidades; 1 centena = 10 decenas; etc. Para expresar la carencia de unidades de cualquier orden, se emplea el cero.
 - Posición: cada elemento o cifra o dígito en una representación numérica representa la cantidad de unidades del orden correspondiente al lugar que ocupa en la representación.

Ejemplo: $2.347 = 2.000 + 300 + 40 + 7 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7$ (2 unidades de millar más 3 centenas más 4 decenas más 7 unidades)

QUÉ HAY QUE SABER PARA APRENDER:

1).- Cantidad discreta a nivel intuitivo y comparación grosera de cantidades (en más o en menos); ordenación de pequeñas cantidades por su numerosidad o cardinalidad; composición y descomposición sencilla de cantidades; “dividir totalidades de muy diversas maneras” (Kamii)

2).- Números del cero al nueve:

- LECTURA Y ESCRITURA DE CIFRAS: saber que “8” se lee “ocho” y viceversa.
- SECUENCIA NUMÉRICA VERBAL Y CIFRADA hasta 10 (CONTAR desde 1 hasta 10)
- CARDINALIDAD DE PEQUEÑOS CONJUNTOS DE OBJETOS: construir un conjunto de “siete” objetos; distinguir un conjunto de “siete” objetos entre varios, . . .
- ASIGNAR CIFRAS A CONJUNTOS SEGÚN SU CARDINAL: en ambos sentidos, asignar una cifra para indicar el cardinal y elegir un conjunto que tenga el cardinal que indica una cifra dada.
- COMPONER, DESCOMPONER Y ORDENAR CONJUNTOS POR SUS CARDINALES RESPECTIVOS.

A QUÉ HAY QUE PRESTAR MÁS ATENCIÓN EN EL PROCESO DIDÁCTICO Y CÓMO: (algunas indicaciones)

principio de agrupamiento en base 10 (Agrupación de objetos sin estructurar (bolsas, gomillas, vasos, etc.); Agrupación estructurada de objetos (ensartado, ensamblado); Material didáctico estructurado (con divisiones (bloques multibase, Montessori), sin divisiones con diferencias apreciables (regletas cuisenaire), sin divisiones sin diferencias apreciables (fichas de colores).

Principio de posición: ábacos; ábaco plano; etc.

Representación: Tipos y Secuencia (concreta, expandida y convencional), Recursos (Material, tarjetas); Fases: descomposiciones mediante sumas; fase aritmética (algoritmos elementales).

A PESAR DE TODO . . .

Algunos errores habituales en lectura y escritura de números: 1- *Escriben los números en función de cómo se nombran.* (“treinta y cinco” como 305); 2- El cero intercalado provoca dificultades.

Los números mayores a mil presentan dificultades para ser leídos. Se confunde número con su escritura y sus propiedades, con contar, con operar, etc. Los niños pueden saber recitar la secuencia numérica y sin embargo no saber contar, ni lo que significa este hecho. Pueden saber escribir los números pero no saber que 15 representa una decena más 5 unidades. El alumno puede saber escribir números pero no saber el valor que tiene la posición de las cifras en él

V. RELACIÓN ENTRE LOS NÚMEROS. LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Los números son útiles, entre otras cosas, porque se pueden combinar entre sí para obtener nuevos números. Se pueden sumar, restar, etc. para obtener resultados de acciones o para resolver un problema. Los números se pueden relacionar entre sí y combinar a través de las operaciones aritméticas, que pueden ser consideradas desde los tres puntos de vista siguientes:

- **matemático**: una operación aritmética es una “ley de composición interna” que se define entre los números;
- **semiótico** / didáctico: una operación es un conjunto de significados ligados a acciones con cantidades y números (resolución de problemas);
 - suma o adición: reunir, agregar, juntar, etc.
 - resta o sustracción: perder, quitar, sustraer, separar, etc.
 - multiplicación: reiterar, repetir, contar a saltos iguales, etc.
 - división: restar sucesivamente, repartir equitativamente, fraccionar, distribuir, etc.
- **algorítmico**: una operación aritmética es un procedimiento sistemático de cálculo aritmético.

Por motivos didácticos, el primero de los enfoques no será tratado aquí con excepción de la representación (signos, expresiones, etc.) y alguna justificación y definición elementales, mientras que centraremos la atención en el segundo y tercer aspecto distinguiendo claramente entre las operaciones y su utilidad en la resolución de problemas y en el desarrollo de la faceta funcional de los conocimientos aritméticos, por un lado, y los algoritmos y procedimientos de cálculo por otro. Este tercer aspecto será desarrollado en el apartado siguiente.

Las operaciones aritméticas en el currículo de Primaria

Se han de trabajar a lo largo de todos los cursos de Educación Primaria los siguientes aspectos:

1. las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números naturales: *significados y contextos*; problemas aritméticos; aplicaciones de las operaciones aritméticas;
2. *representación y terminología* de las operaciones aritméticas: signos, igualdades, tipos (vertical, horizontal); lenguaje asociado (doble, mitad, etc.);
3. *propiedades* de las operaciones aritméticas
4. *relaciones* entre el sistema decimal, los hechos numéricos, las relaciones entre números y las operaciones aritméticas.

Desde la óptica matemática, Maza (2001) indica que las operaciones de adición y sustracción de números naturales se pueden definir a partir de las operaciones de unión y diferencia de conjuntos. "Dados dos números naturales a , b se cumplirá $a-b=c$ cuando exista un número natural c tal que se cumpla $b+c=a$ " (Lo que conocemos comúnmente como la prueba de la resta).

Castro (2001) señala que la multiplicación y la división son operaciones que forman parte de una misma estructura algebraica, que se construye tomando la multiplicación como punto de partida y definiendo después la división a partir de la multiplicación:

" $a:b=c$ ", con b distinto de cero, equivale a que existe un número c tal que " $b \times c = a$ " (prueba de la división).

Desde el punto de vista semiótico y didáctico, la suma y la multiplicación están relacionadas al poderse interpretar la **multiplicación** como una suma de sumandos iguales o adición reiterada ($6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6$). Igualmente, la **división** se puede interpretar como un conjunto de sustracciones reiteradas hasta que no se pueda quitar más ($18:4$ empiezo restando 4, a lo que queda le resto 4, y así sucesivamente. Hemos quitado 4 veces 4 y han sobrado 2 (resto)). El reparto equitativo se encuentra en la base de esta interpretación de la división (uno de los contextos de las fracciones).

En lo concerniente a las propiedades, hemos de indicar como adecuado para estos niveles el tratamiento didáctico de la suma y la multiplicación como formas de establecer relaciones entre los números. Algunas de ellas son las siguientes, que se trabajarán con material didáctico:

Propiedades de la suma:

Propiedad conmutativa: $4 + 3 = 3 + 4$

Propiedad asociativa: $(4 + 6) + 3 = 4 + (6 + 3)$

Propiedad distributiva: $2 \times (5 + 7) = 2 \times 5 + 2 \times 7$

Elemento neutro (el cero): $5 + 0 = 5$

Propiedades de la multiplicación:

Propiedad conmutativa: $6 \times 2 = 2 \times 6$

Propiedad asociativa: $(3 \times 6) \times 4 = 3 \times (6 \times 4)$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $3 \times (5 + 9) = 3 \times 5 + 3 \times 9$ Elemento neutro (la unidad): $4 \times 1 = 4$.

VI.- LOS ALGORITMOS Y OTROS PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO (CÁLCULO ESCRITO, MENTAL, ESTIMACIÓN Y CALCULADORA).

Una parte importante de las operaciones aritméticas, la parte operativa de las mismas, son los algoritmos o procedimientos sistemáticos para la realización práctica de dichas operaciones. Un **Algoritmo** es cualquier procedimiento mecánico consistente en la aplicación ordenada de una serie de pasos y acciones; es una técnica o método basado en un conjunto de actuaciones secuenciadas. Un algoritmo aritmético es un algoritmo en el que intervienen números y operaciones aritméticas. El algoritmo aparece en el momento en que el aprendiz es capaz de trabajar con los números en forma simbólica en lugar de hacerlo físicamente con los objetos (Roa, 2001).

Pero una cosa es el algoritmo (fórmula o técnica) y otra distinta el cálculo aritmético (procedimiento práctico). Veamos en qué consiste esto:

Cálculo aritmético: Proceso por el que se efectúa una operación aritmética simple o compleja o varias de ellas combinadas. Cuando se habla de **cálculo aritmético** se hace referencia a un proceso de aplicación práctica de las operaciones aritméticas, bien sea mediante el algoritmo, o bien mediante otros procedimientos como veremos (calculadora, cálculo mental, etc.). El cálculo aritmético puede resolverse:

- mediante el algoritmo (de lápiz y papel o con otro soporte; cálculo escrito);
- mediante la manipulación de objetos y el recuento;
- mediante material didáctico estructurado (modelos intermedios);
- mediante la calculadora (cálculo con calculadora);
- mediante lo que se conoce como “hechos numéricos” y la utilización de la memoria y de estrategias de composición y descomposición (cálculo mental, cálculo estimado, etc.);

Los *hechos numéricos* son resultados procedentes de combinaciones numéricas o de relaciones aritméticas o que tienen que ver con propiedades de los números y las operaciones o con situaciones numéricas y aritméticas notables, curiosas o fácilmente recordables. Son los elementos básicos del cálculo mental o de cabeza, pueden ser útiles para la resolución de problemas o el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones aritméticas. La mayoría de los hechos numéricos se pueden clasificar en dos grandes grupos: aditivos o multiplicativos. Veamos algunos de ambos tipos.

- Hechos aditivos: contar hacia arriba a saltos iguales; dieces (sumar 10, 20 o 30 es fácil sin más que sumar 1, 2 o 3 a las unidades de orden superior); dobles o parejas de números iguales (doble de 8 es 8+8, doble de 3 es 3+3); conmutatividad; el cero en los cálculos; reglas y patrones aditivos: $8+6=14$; $18+6=24$; $28+6=34$. . .);

- **Hechos multiplicativos:** las tablas de multiplicar; multiplicar por potencias de 10 es añadir ceros a la derecha; conmutatividad; doblar o hallar y utilizar dobles (tablas del 2, del 4 y del 8); reglas y patrones multiplicativos (multiplicar por 5 siempre da un número que termina en cero o en cinco).

La mayor parte del currículo de matemáticas de Educación Primaria está dedicada a la enseñanza de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales y a la adquisición de destrezas de cálculo aritmético. El motivo no es sólo la utilidad práctica (saber hacer cuentas para averiguar lo que me he gastado se puede hacer con la calculadora, si bien parece prudente conocer el algoritmo por si no tengo calculadora en ese momento). Hay razones de tipo formativo (el trabajo sobre los algoritmos facilita la comprensión de los números y sus propiedades, ayuda a aprender a gestionar la información; el cálculo mejora las capacidades para el desarrollo de la autonomía, facilita el razonamiento, etc.) y de tipo funcional (calcular y operar influye sobre las habilidades de estimación y aproximación con cantidades y medidas, desarrolla las competencias de pensar y razonar o argumentar, entre otras, y facilita la toma de decisiones en numerosas situaciones cotidianas).

Los aspectos más importantes a trabajar son: el cálculo mental, cálculo estimado y cálculo aproximado, las estrategias de cálculo, los recursos y modelos intermedios entre las cantidades y los números, como las regletas, los ábacos o los bloques multibase, la comprensión y el dominio de los algoritmos, las restas con llevadas y la división por números de varias cifras. Lo más difícil es la división en todas sus facetas (algoritmo, estrategias, comprensión, etc.).

Existen distintos **tipos de cálculo aritmético** que resultan de combinar dos a dos las modalidades siguientes:

Tipo de cálculo por el resultado:

- **Exacto** (valor o resultado exacto de la operación);
- **Estimado o aproximado** (valor o resultado aproximado de la operación);

Tipo de cálculo por el soporte / procedimiento utilizado:

- **Algorítmico;** (CÁLCULO ESCRITO)
- **Mental;** (CÁLCULO MENTAL)
- **Calculadora u otro soporte;** (CÁLCULO CON CALCULADORA)

Cálculo escrito:

Las operaciones de un solo dígito están íntimamente ligadas al concepto de cada operación concreta y sus resultados recogidos en tablas (de sumar o multiplicar) que conviene aprender de memoria. Pero los algoritmos nos permiten extender las operaciones a números de más de una cifra. Un algoritmo posee propiedades: claridad, eficacia y universalidad, con lo que se consigue que su realización se convierta en algo mecánico, resuelto con un número finito de pasos y que se resuelve siempre de la misma forma, independientemente de la magnitud de los números con los que se opere.

Es importante explicar y que los alumnos aprendan cómo se colocan los números para cada operación. Se colocan verticalmente, justificados a la derecha, excepto en la división que van uno junto a otro y separados por una caja. Se opera de derecha a izquierda, excepto en la división.

Para asimilar los algoritmos de las operaciones aritméticas se utilizan materiales estructurados: objetos separados (caramelos, bolsas, bolas, cajas de bolas, etc.), bloques multibase, ábacos ...

Cálculo mental

Realización de procedimientos de cálculo mediante procesos mentales internos (algoritmos mentales). Se suelen apoyar en un conjunto limitado de hechos numéricos y requieren ciertas habilidades (conteo, recolocación, compensación, descomposición, redistribución, etc.). Son

rápidos, flexibles, constructivos y exigen comprensión. Es un tipo de cálculo que se utiliza preferentemente para cálculos rápidos (ej.: buscando la base 10: $9+7=10+6=16$).

Dos tipos de cálculo mental (según Gómez, B., 1998):

- de estímulo-respuesta (tablas: ¡Cuánto es 8 por 7!), basado en la memoria;
- cálculo pensado: con toma de decisiones y elección de estrategias (Ej.: resolver mentalmente $539 - 189$ de todas las formas posibles).

Presenta numerosas variantes, como por ejemplo:

- *Cálculo pensado aditivo* (Ej.: $77+148=70+7+130+18=...$)
- *Cálculo pensado multiplicativo*, con las estrategias (Ej.: 8×4211 ; 8×4 mil, 32 mil; 8×2 cientos, mil 6 cientos; total 33 mil 6 cientos; $8 \times 10...$)

Cálculo estimado o cálculo aproximado

Es el que se realiza cuando lo que se persigue no es la exactitud del resultado. Se emplea con cantidades grandes y se suele basar en el redondeo; presenta una utilidad social fuera de toda duda. Se debe emplear como mecanismo corrector o detector de errores en la realización de los algoritmos tradicionales; Es recomendable la realización de estimaciones antes del empleo del algoritmo tradicional.

Estimación: Consiste en valorar el resultado o la cantidad de una operación de una manera aproximada. Aparecen dos tipos de estimaciones: estimación en cálculo, refiriéndonos exclusivamente a operaciones matemáticas y estimación en medida.

Las características de las estimaciones son las siguientes:

- Se valora la cantidad o el resultado de una operación.
- La persona que va a hacer la estimación tiene alguna referencia, información o experiencia sobre la situación que va a enjuiciar.
- La valoración se realiza por lo general de forma mental.
- Se hace con rapidez y empleando números sencillos.
- El valor no es exacto pero sí adecuado para tomar decisiones.
- El valor admite distintas aproximaciones, según quién la realice.

Cálculo con Calculadora Se trata de un aparato o máquina que por un procedimiento mecánico o electrónico obtiene el resultado de cálculos matemáticos. Tratándose de un recurso individual, cada alumno debe tener la suya propia.

En Educación Primaria, aunque su uso no es frecuente, hay que saber que no están prohibidas, pero hay que hacerle ver al alumnado que no es la herramienta más idónea, dado que los cálculos que se realizan en esta etapa no contienen una gran dificultad y es preferible hacerlos mentalmente o con algoritmos. El maestro, por motivos didácticos, debe hacer que los alumnos utilicen habitualmente todos los tipos de cálculo, incluido este, y tratar de evitar la adopción de prácticas exclusivas de alguno de ellos por comodidad.

Las principales operaciones que debe incluir son suma, resta, multiplicación, división entera y con decimales, fracciones y números mixtos. Es conveniente que tenga una tecla para cambiar el signo de un número y suficientes niveles de paréntesis. Por ejemplo: dado un número, sumar una cantidad fija un cierto número de veces.

VII. INTERVENCIÓN EDUCATIVA

En la Educación Primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito (MEC, 2006).

La planificación y el desarrollo didácticos en el aula de matemáticas de Primaria se deben basar en los siguientes principios y orientaciones generales:

Según el Real Decreto 1513/2006, la intervención educativa tiene que fundamentarse en unos principios psicopedagógicos. Tales principios pueden enmarcarse en la concepción constructivista del aprendizaje escolar, en la formación disciplinar y en el desarrollo de las competencias básicas y matemáticas, para lo que, entre otros aspectos, se ha de tener en cuenta:

- Partir del nivel de desarrollo del alumnado, de sus conocimientos previos, intereses, curiosidades, ideas previas, estilos de aprendizaje, etc..
- Organizar cuidadosa y coherentemente, mediante una planificación previa flexible, los contenidos y las actividades en un proceso educativo en espiral con variedad de experiencias y actividades en situaciones diversas e interesantes, de manera que todos sus contenidos estén relacionados;
- Propiciar en todo momento y siempre que se pueda el aprendizaje significativo y el gusto por el trabajo bien hecho creando en el aula un ambiente agradable e intelectualmente estimulante mediante experiencias adecuadas a las características e intereses de los alumnos, que constituyan retos y buenas ocasiones para la implicación personal y la generación de actitudes de indagación y descubrimiento (Goñi (2006));
- Es importante el enfoque experiencial en el aula de matemáticas, para lo que se debe prestar atención al trabajo sobre situaciones reales, por un lado, material didáctico y recursos, por otro, y actividades lúdicas por otro;
- Adoptar un enfoque disciplinar en lo instrumental y globalizado e interdisciplinar en lo formativo y funcional, procurando que siempre exista relación entre el trabajo instrumental y la faceta funcional del conocimiento matemático;
- Utilizar distintas metodologías de trabajo en el aula (trabajo individual para el desarrollo de determinados aprendizajes (expresión escrita, lectura, ejercicios de cálculo, etc.) y en grupos de distinto tamaño, equilibrados y diversos en cuanto a las características de sus componentes);
- Utilizar distintos códigos y modos de expresión fomentando en todo momento la comunicación y la expresión verbal y matemática;
- los procesos de resolución de problemas deben constituir uno de los ejes principales de la actividad escolar en matemáticas; en la resolución de un problema se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución, comunicar los resultados, etc..
- Los materiales didácticos y recursos son medios interesantes para la atención a la diversidad, pues acercan los conceptos abstractos a la intuición a través de la manipulación y permiten romper la uniformidad de los procedimientos con variantes más adecuadas para algunos alumnos.

En particular, en lo que se refiere a la numeración y las operaciones aritméticas, hemos de añadir, sin ser exhaustivos, las siguientes principios y orientaciones específicas:

Sobre numeración

A).- PRINCIPIO DE AGRUPAMIENTO EN BASE 10

- Agrupación de objetos sin estructurar (bolsas, gomillas, vasos, etc.)
- Agrupación de objetos estructurada (ensartado, ensamblado)
- Material didáctico estructurado
 - con divisiones (bloques multibase, Montessori)
 - sin divisiones con diferencias apreciables (regletas cuisenaire)
 - sin divisiones sin diferencias apreciables (fichas de colores)

B).- PRINCIPIO DE POSICIÓN

- ábacos; ábaco plano; etc.

C).- REPRESENTACIÓN

- Tipos y Secuencia (concreta, expandida y convencional)
- Recursos (Material Montessori, tarjetas)

- Culminación del proceso de representación. Fases:
 - descomposiciones canónicas
 - diversas descomposiciones equivalentes (mediante sumas . .)
 - fase aritmética (algoritmos elementales)

Sobre operaciones aritméticas y cálculo

Consideraciones curriculares sobre el cálculo mental y el cálculo estimado

En la enseñanza de los algoritmos y del cálculo aritmético, Maza, C. (1991) realiza las siguientes recomendaciones:

En primer curso de Primaria se deben trabajar:

La estimación del resultado de sumas y restas entre números de dos dígitos;

El cálculo mental de resultados de problemas donde intervengan números de dos dígitos.

En segundo curso:

Estimación en operaciones entre números de tres dígitos o un número de tres dígitos con otro de dos;

Cálculo mental en problemas donde intervengan las operaciones y números anteriores.

En tercer curso:

Estimar y calcular mentalmente y por escrito la solución a problemas donde intervengan números de cuatro o más dígitos.

El cálculo mental y el escrito se deben trabajar en clase simultáneamente, e incluso tendiendo a que el cálculo mental sea previo al escrito y que éste sirva para comprobar la exactitud del anterior.

VIII. COMENTARIOS FINALES

La presente área se debe enmarcar en un enfoque pluridisciplinar y globalizado e integrador con todas las áreas del currículo. El área de matemáticas siempre ha sido y seguirá siendo, una de las áreas con más solidez en el sistema educativo, dada su importancia para resolver problemas de la vida diaria, representar la realidad, etc. Pero su principal característica es que utiliza un lenguaje común a todos los seres humanos (los números, los sistemas de numeración, cálculo ...) y una manera común de comprender y organizar la realidad.

Los números, las operaciones aritméticas y el cálculo, la resolución de problemas aritméticos, los significados del lenguaje matemático o el modo de hacer conjeturas y razonamientos, capacitará a los alumnos/as para analizar la realidad, producir ideas y conocimientos nuevos, entender situaciones nuevas y acomodarse a contextos cambiantes.

Pero el reto en el área de Matemáticas consistirá más que en enseñar al alumnado los números, las operaciones aritméticas y la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal, en enseñarles a *pensar matemáticamente*: abstraer y aplicar ideas matemáticas en un amplio abanico de situaciones, desarrollar las competencias básicas y matemáticas específicas e iniciarse en la resolución de problemas como fundamento para una formación personal, laboral y social de calidad y como garantía para el desarrollo de la autonomía e iniciativa personal y la continuación independiente del proceso permanente de aprendizaje. Se trata, evidentemente, de un proceso lento cuyos resultados se irán viendo de forma progresiva a lo largo de toda la Educación Primaria.

IX. BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M. (1980).- Fracciones. Málaga: MCEP.

Cascallán, M T. (2002) "Iniciación a las matemáticas. Materiales y recursos didácticos. Madrid. Aula XXI. Santillana.

Castro, E. (Ed.) (2001).- Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid: Síntesis.

Coriat, M (2001). Materiales didácticos y recursos. En E. Castro "Didáctica de la

- Dickson y Brown. (1991). El aprendizaje de las Matemáticas. Barcelona: Labor.
- Gómez, B. (1993). Numeración y Cálculo. Madrid: Síntesis.
- Goñi, J. M. (2006) "Matemáticas e interculturalidad". Barcelona: Graó.
- Hernán, F. (1988).- Recursos en el aula de Matemáticas. Madrid: Síntesis. Actividades para comprender la potencialidad del sombreado de áreas.
- Juegos y pasatiempos de la Colección Matemáticas, cultura y aprendizaje de la Editorial Síntesis.
- La calculadora en el aula. Colección Síntesis.
- Llinares, S.; Sánchez, V. (1989).- Fracciones. Madrid: Síntesis.
- matemática en Educación Primaria". Madrid: Síntesis.
- Maza, C (1991). Enseñanza de la Suma y de la Resta. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (2001) Matemáticas en Educación Primaria En E. Castro (Ed.). "Didáctica de la matemática de Educación Primaria". Madrid: Síntesis.
- Roa, R. (2001) "Algoritmos de cálculo". En E. Castro (Ed.). Didáctica de la matemática en Educación Primaria. Madrid: Síntesis.
- Vargas Machuca (1990). "Números enteros". Madrid: Síntesis.

X. REFERENCIAS LEGISLATIVAS

JUNTA DE ANDALUCÍA:

Orden de 10/08/2007 de la Junta de Andalucía

Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación. Junta de Andalucía.

MEC:

MEC (2006 a) Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de 2006, de Educación.

MEC (2006, b) Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Ley Orgánica de Educación 2/2006 de 3 de mayo (LOE). MEC

Decretos 230 y 231 de 2007, de 31 de julio, sobre ordenación y enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria.

XI. REFERENCIAS WEB

- ares.cnice.mec.es/matematicasep/index.html (proyecto cifras. Recurso didáctico que incorpora actividades específicas estructuradas por ciclos y bloques de contenidos).
- escolar.comlmenumate.htm (página con recursos sobre cómo abordar contenidos en el área de matemáticas como fracciones, números decimales, números enteros ...)
- juntadeandalucia.es/averroes/recursos/area-matematica.php3 (Página de Averroes, Red telemática Educativa de Andalucía. Recursos para el área de matemáticas.- matematicas.net/ (Página para la exposición de recursos matemáticos sirviendo de punto de unión entre profesores)
- Thesaurus.maths.org (Enciclopedia de Matemáticas con numerosos enlaces)
- Jgodino/edumat-maestros/welcome (Godino, J. (2004); matemáticas y su didáctica para maestros: fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sistemas numéricos, proporcionalidad, geometría, magnitudes, etc.
- Wikipedia.org/wiki/Matem% (Enciclopedia digital sobre matemáticas con numerosos enlaces).