

1 CÁLCULO ADITIVO

- ◆ CÁLCULO. CALCULAR
- ◆ TIPOS Y PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO ADITIVO
- ◆ CÁLCULO ADITIVO MENTAL Y ESTIMADO
- ◆ CÁLCULO ADITIVO ALGORITMICO
- ◆ CÁLCULO ADITIVO CON INSTRUMENTOS AUXILIARES



Cálculo

- **Cálculo**: acción, efecto o resultado de calcular.
- **Calcular o realizar un cálculo en aritmética elemental**: efectuar una o varias operaciones aritméticas sobre números para obtener resultados o consecuencias de acciones previamente concebidas sobre datos numéricos conocidos.

Desde un punto de vista más formal:

- **Un conjunto de elementos primitivos** que pueden establecerse por enumeración o por una propiedad que permita discernir sin lugar a duda cuándo un elemento pertenece o no al sistema.
- **Un conjunto de reglas de formación de “expresiones bien formadas”** que permitan establecer, en todo momento y sin lugar a dudas, cuándo una expresión pertenece al sistema y cuándo no.
- **Un conjunto de reglas de transformación de expresiones y elementos**, mediante las cuales se puedan obtener nuevos elementos y expresiones equivalentes dentro del propio sistema.

PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

Cálculo mental; puede servir tanto para realizar cálculos exactos como aproximados, aunque hay autores que bajo esta denominación consideran sólo los cálculos exactos obtenidos mentalmente; a su vez, podemos distinguir:

cálculo mental **exacto**;

cálculo mental **aproximado**;

Cálculo estimado O estimación en cálculo; se suele realizar mentalmente, aunque no tiene porque ser siempre así, suele ser aproximado, aunque a veces proporciona resultados exactos, y se suele realizar sobre grandes cantidades.

Cálculo algorítmico estándar (normalmente con lápiz y papel; su aplicación correcta proporciona cálculos exactos;

Cálculo con instrumentos auxiliares

- calculadora
- ábacos
- bloques multibase
- otros



Cálculo mental

- Realización de procedimientos de cálculo mediante procesos o algoritmos mentales (internos/privados) sin un apoyo significativo en la memoria.
- Bajo esta denominación se suelen entender los cálculos exactos obtenidos mentalmente.

Algunas características

- Es de cabeza y se puede hacer rápidamente;
- Se apoya en un conjunto limitado de hechos numéricos;
- Requiere ciertas habilidades (conteo, recolocación, compensación, descomposición, redistribución, etc.)
- A diferencia del algoritmo estándar, el cálculo mental suele comenzar por las cifras más significativas (las de mayor valor);
- Los errores quedan disminuidos cuantitativamente. El margen de error suele ser más pequeño;

- Para Plunkett (en Dickson, 1991) los algoritmos mentales son:
- **flexibles**: ¿se emplean métodos diferentes para realizar mentalmente: $83 - 79$, $83 - 51$, $83 - 7$?
- **activos** (son efectivos y su uso es consciente, controlado y definido);
- **holísticos** (trabajan con los números completos: $4 \times 35 = 2 \times 70 = 140$; $4 \times 28 / 4 \times 30 = 120$, $120 - 8 = 112$;
- **constructivos** ($37 + 28$, contar: $37, 47, 57, 67, 67 - 2 = 65$);
- **exigen comprensión**
- proporcionan una **aproximación rápida** del valor correcto (se empieza por la cifra de mayor orden: $34 \times 4 = 30 \times 4 + 4 \times 4$).

TIPOS DE CÁLCULO MENTAL

- de estímulo respuesta / memorístico (tablas: ¡Cuánto es 8 por 7!)
- con toma de decisiones y elección de estrategias (cálculo pensado) (resolver $539 - 189$ de todas las formas posibles):
 - Cálculo pensado aditivo, con las estrategias:
 - Recolocación ($47+86+53+14=(47+53)+(86+14)$)
 - Descomposición ($77+148=70+7+130+18=...$)
 - Redondeo
 - Por compensación ($57+38=(57+3)+(38-3)$)
 - Por conservación: Añadiendo (redondeo por arriba): ($547-189=(547+1+10)-(189+1+10)$), Quitando (redondeo por abajo): ($252-59=(200+52)-(52+7)=200+(52-52)+7$)
 - Conteo
 - Ascendente ($283+435$: $283+400$; $683+30$; $713+5$, 718)
 - Descendente ($62-27$: de 62 a 60, 2; de 60 a 30, 30; de 30 a 27, 3; total: $2+30+3=35$)

Cálculo estimado o aproximado

- Es el que se realiza cuando lo que se persigue no es la exactitud del resultado.

Algunas características


- Se emplea con cantidades grandes y se suele basar en el redondeo;
- Presenta una utilidad social fuera de toda duda;
- El cálculo estimado está poco presente en las aulas debido a que:
 - Se suelen identificar los procedimientos matemáticos con los cálculos exactos;
 - No se suele tolerar la presencia de errores;
 - Son cálculos difíciles de evaluar (todas las aproximaciones son válidas).

Estrategias de cálculo mental o estimado

- Manipulación y uso de la secuencia numérica
- Modelos y representaciones
- Hechos numéricos
- Otras



1) Manipulación y uso de la secuencia numérica

- 
- A decorative header consisting of six circles arranged in a row. From left to right, the colors are: solid light purple, hollow light purple, solid light purple, hollow light purple, and solid light purple.
- 1.- Contar todos.
 - 2.- Contar hacia arriba desde el primero.
 - 3.- Contar hacia arriba desde el mayor.
 - 4.- Quitar de.
 - 5.- Contar hacia abajo desde o descontar de.
 - 6.- Quitar hasta.
 - 7.- Contar hacia abajo hasta o descontar hasta.
 - 8.- Añadir hasta.
 - 9.- Contar hacia arriba desde....hasta.
 - 10.- Emparejar.

Estrategias basadas en la manipulación y en el uso de la secuencia numérica

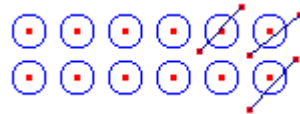
- **Contar todos** es una estrategia aditiva en la que se cuenta la colección resultante de haber unido las colecciones de objetos correspondientes. Es una estrategia en la que se utilizan modelos físicos o los propios dedos.
- **Contar hacia arriba desde el primero o desde el mayor,** son dos estrategias que se utilizan sin necesidad de modelos físicos y que consisten en comenzar el recuento a partir de uno de los números dados.

QUITAR DE Y CONTAR LO QUE QUEDA

- Ejemplo 1: Felipe tiene 12 caramelos y regala 3 ¿Cuántos caramelos le quedan?

El niño que utiliza la estrategia quitar de hace lo siguiente:

“Toma 12 caramelos (o cualquier objeto simple que los represente) y a continuación quita tres, cuenta lo que queda”.




QUITAR HASTA Y CONTAR LO QUE QUEDA

- Ejemplo 2 : Felipe tiene 14 caramelos y regala 9 ¿Cuántos caramelos le quedan?

El niño que utiliza la segunda estrategia hace lo siguiente:

“Toma 14 caramelos y a continuación va quitando hasta quedarse con 9. Cuenta lo que ha quitado.”



- 
- Contar hacia abajo desde y contar hacia abajo hasta son estrategias correspondientes a las dos anteriores pero en las que no se utilizan modelos físicos, sino que la secuencia numérica es el único soporte.
 - descontar de, consiste en descontar desde el minuendo, tantos como el sustraendo y donde me detengo es el resultado. En descontar hasta, consiste en descontar del minuendo hasta llegar al sustraendo, lo descontado es el resultado.
 - Los ejemplos anteriores pueden servir. Las estrategias son similares, con la diferencia de utilizar la secuencia numérica en lugar de objetos físicos.

- Añadir hasta utilizada con modelos físicos, es una estrategia sustractiva aunque invoca acciones aditivas.

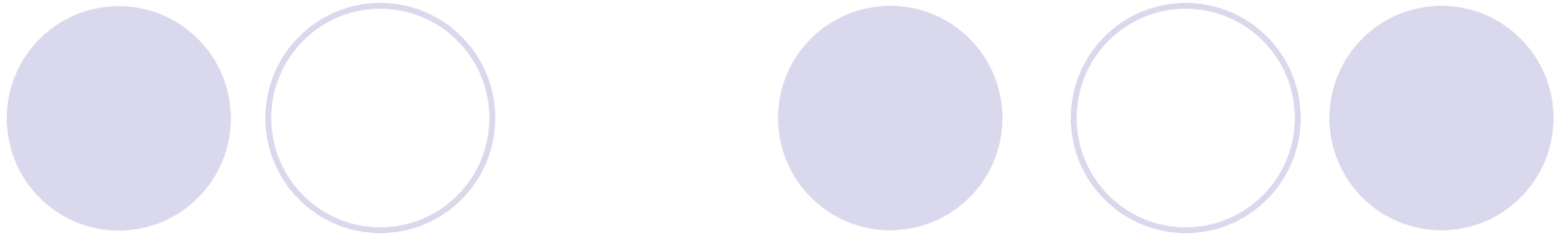
Ejemplo:

Juan tiene 14 cromos y ha perdido 8 ¿Cuántos cromos le quedan?

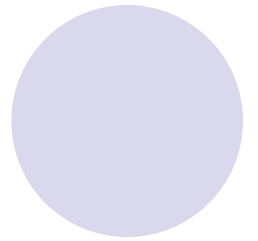
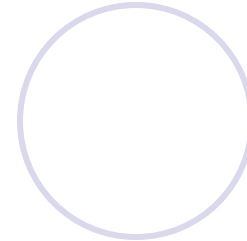
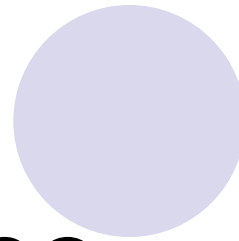
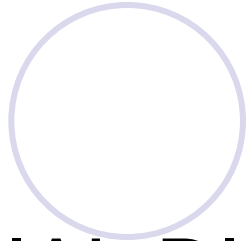
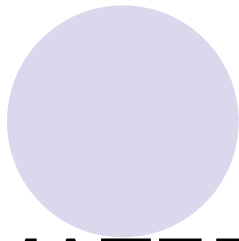
El niño que utiliza esta estrategia, toma 8 objetos y va añadiendo hasta conseguir 14. La solución son los que añade.

- Contar hacia arriba desde... hasta, es semejante a la anterior pero utilizando como soporte la secuencia numérica.

- Emparejar: hacer corresponder uno a uno las cantidades, y el recuento posterior de la parte que queda sin pareja.



2) MODELOS Y REPRESENTACIONES



- **MATERIAL DIDÁCTICO**

- Puntos, balanza, regletas, ábacos, bloques multibase, cartas, dominós, etc.

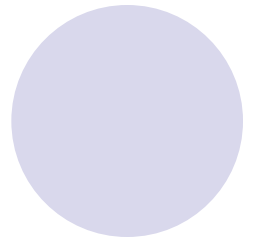
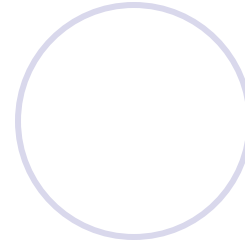
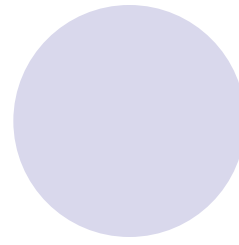
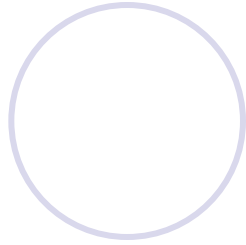
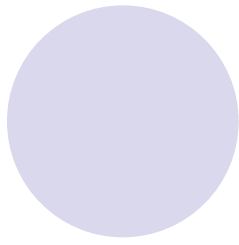
- **REPRESENTACIONES GRÁFICAS**

- Recta numérica, diagramas, dibujos, etc.

- **EXPRESIONES INCOMPLETAS**

- Ecuaciones aritméticas sencillas

- Ver Maza, C. (bibliografía)



3) HECHOS NUMÉRICOS ADITIVOS

HECHOS NUMÉRICOS ADITIVOS



combinaciones numéricas basadas en las propiedades del sistema de numeración decimal

comienzo del cálculo mental

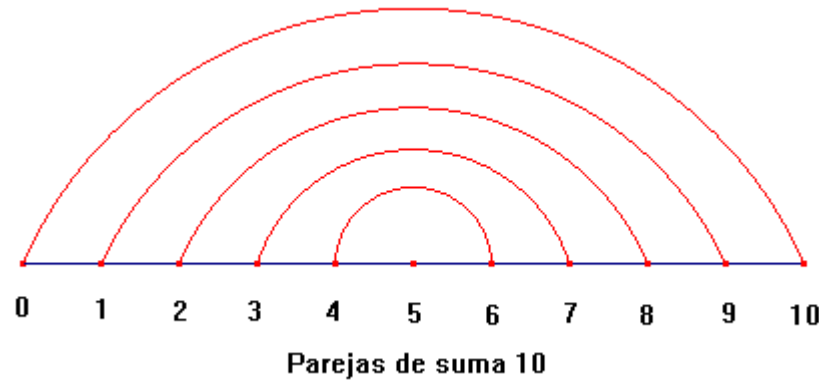
instrumento poderoso para la resolución de problemas y el desarrollo de los algoritmos de las operaciones fundamentales

Tipos de estrategias a desarrollar para trabajar los hechos numéricos aditivos:

- **Ceros:** Cuando se suma cero todo queda igual
- **Conmutatividad:** Se usa antes de tener conciencia de ello y se afianza con tal fuerza que algunos se sienten mas seguros al dar el resultado de una pareja de números conmutándolas
- **Conteo ascendente:** Cuando se domina la secuencia ascendente y se sabe subir de dos en dos , de tres en tres, sumar 1, 2 o 3 a cualquier número es algo sencillo de realizar
- **Dieces:** Sumar diez a un número dígito es muy simple cuando se dominan las reglas sintáctica de nuestro sistema de numeración. Basta con incorporar un 1 a la izquierda del número dado.

- **Dobles:** Las parejas formadas con números iguales ($8+8$) son en general más fáciles de retener que el resto de parejas.
- **Los dobles más uno:** Son los vecinos del piso de arriba de los dobles. Para resolverlos basta con sumar una unidad a estos últimos.
- **Los dobles menos uno:** Son los vecinos del piso inferior de los dobles. Para resolverlos basta con restar una unidad a estos últimos.
- **El número misterioso:** Cuando se está ante una pareja de números casi vecinos, números entre los que hay uno escondido, $7+9$ o $6+8$, es posible resolver la situación hallando el doble del número misterioso.
- **Los nueves:** Sumar 9 es como sumar diez menos uno.

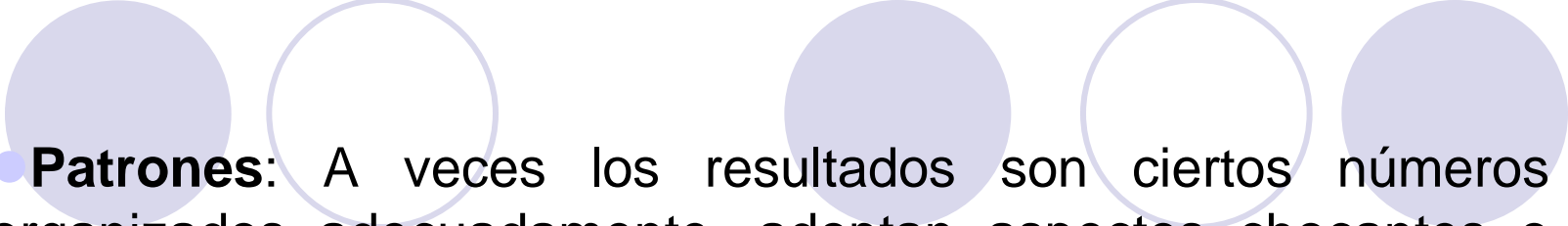
- **La familia de diez:** Se trata de organizar parejas de números que sumen lo mismo, en este caso 10.



- **Buscando diez:** Se trata de descomponer uno de los sumandos de tal manera que se pueda completar el otro a diez:

$$7 + 4 = (7 + 3) + 1.$$

$$8 + 5 = (8 + 2) + 3$$



● **Patrones:** A veces los resultados son ciertos números organizados adecuadamente, adoptan aspectos chocantes o curiosos, a veces siguen reglas, patrones:

$$8 + 6 = 14$$

$$18 + 6 = 24$$

$$28 + 6 = 34$$

Además de estas estrategias podremos utilizar otras vías, como por ejemplo el conteo con objetos físicos, el tratamiento con materiales didácticos y otros recurso adecuados a estas edades.

Cálculo mental vs. cálculo escrito

The text is centered and surrounded by seven light purple circles. One circle is empty and positioned above the word 'escrito'. Two circles are filled and positioned above the words 'mental' and 'cálculo'. Two circles are filled and positioned below the words 'mental' and 'cálculo'. One circle is empty and positioned below the word 'escrito'.

- Cálculo mental ((sinónimo)) cálculo pensado o “de cabeza”
- Cálculo escrito ((sinónimo)) cálculo automático que ofrece el algoritmo
- No siempre el cálculo escrito es automático.
- No siempre el cálculo mental es pensado
- Con frecuencia se mezclan en muchas actividades



Cálculo Algorítmico

- Un **algoritmo**, según Gómez (1.988) es “ Una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos, para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos” .
- Cada operación tiene sus correspondientes algoritmos: entre otros los que llamamos “ algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas” (ATOA).

Diferencias entre algoritmo y operación

- Una operación aritmética es una acción o aplicación sobre números que se combinan para dar lugar a otro número y un algoritmo es un procedimiento de cálculo para averiguar sin ambigüedad el número resultante de la combinación mencionada
- El algoritmo es un procedimiento para obtener el resultado de la operación, pero no es la única forma de llegar al resultado. Existen otros procedimientos:.
 - Calculadora.
 - Cálculo mental.
 - Hechos numéricos básicos
 - ...

Observaciones sobre los algoritmos.

- Existen diferentes algoritmos para cada una de las operaciones. A lo largo de la historia algunos han evolucionado y otros han sido sustituidos por otros “más eficientes”.
 - Algoritmos tradicionales o institucionales.
 - Algoritmos antiguos.
 - Algoritmos “no estandar”.

$$\begin{array}{r} 435 \\ + 236 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \quad 30 \quad 5 \\ + 200 \quad 30 \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 5 \\ 2 \quad 3 \quad 6 \\ + \quad 1 \quad 1 \\ \hline 6 \quad 6 \quad 1 \\ 6 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

- (ver presentación 4.2.- algoritmos de la suma y la resta)

CÁLCULO ADITIVO CON INSTRUMENTOS AUXILIARES

Calculadora

Ábacos

Bloques multibase

Tablas

Ordenadores: Excel

Software educativo para practicar el cálculo

