TEMA 3.- RELATIVIDAD ADITIVA Y NÚMEROS ENTEROS

UNA PROPUESTA DIDACTICA[1]

1.- INTRODUCCIÓN.

En este documento se expone con detalle una propuesta didáctica que trata de materializar, a modo de conclusión práctica, las consideraciones, reflexiones y resultados que se pueden encontrar en numerosos documentos teóricos que abordan el tema desde las matemáticas, la psicología, la pedagogía o la epistemología, entre otros campos.

El plan de exposición que hemos adoptado incluye, en primer lugar, una breve explicación teórica de los principios que determinan la propuesta, para pasar directamente, a continuación, a un desarrollo pormenorizado y comentado de la misma, en el que se irán completando poco a poco las ideas y principios que se manejan así como los objetivos que se pretenden alcanzar. En principio, y antes de pasar a explicar escuetamente los esquemas que ilustran el proceso didáctico que proponemos, parece conveniente introducir al lector en el tema por medio de las siguientes puntualizaciones:

a) La propuesta que se expone es una vía de acceso didáctica a los números enteros así como a los conceptos y relaciones implícitos en su construcción. En tal sentido, queremos dejar patente, que la importancia del tema no está únicamente en el hecho aislado de enseñar-aprender nuevos números, sino en las ideas que se han de manejar en el proceso (estructura de orden, doble signo, etc.), las cuales constituyen un soporte fundamental para el desarrollo didáctico de otras cuestiones matemáticas, tales como la resolución de ecuaciones, funciones, número real, ejes coordenados, número complejo, estadística descriptiva, etc.[2]

b) Debido a las características peculiares de los conceptos que entran en juego, tal y como señalan algunos autores (Whiffing, P.; Aze, I., 1989), la propuesta que aquí se desarrolla pretende ser un proceso ordenado cuya planificación y desarrollo afecta a varios cursos y niveles, quedando si acaso fuera de la Educación Primaria la culminación formal del mismo.

c) Es una propuesta teórica, abierta a la experimentación y fundamentada tanto en el análisis de numerosos documentos al respecto, como en la reflexión sobre la experiencia personal.

d) El modelo se ha diseñado teniendo en cuenta la necesidad de superar el obstáculo histórico fundamental y posiblemente didáctico que supone la identificación del número positivo con la cantidad (Bustos, I.; Jimeno, M; Vargas-Machuca, I., 1989).

2.- ESQUEMA Y PRINCIPIOS DEL PROCESO EDUCATIVO.

La propuesta se basa en el proceso que aparece esquematizado en la figura 1. Su desarrollo, que será abordado en los apartados que siguen, pretende constituir una "primera guía" ejemplificada, para la construcción de ingenierías didácticas sobre los números enteros y sobre los conceptos, propiedades y estructuras directamente relacionadas con ellos y que se encuentran subyacentes a su comprensión y constitución. De este modo, a partir del análisis de las situaciones didácticas y de las distintas fases que se proponen, se podría elaborar un diseño curricular, susceptible de una posterior aplicación en el aula y de una consiguiente validación empírica. Nuestra intención, como se puede apreciar a lo largo de la exposición, no es la de proponer un diseño curricular acabado, sino la de aportar ideas que favorezcan la intervención didáctica y su preparación previa en función de las

[1] Versión revisada y actualizada del capítulo 7 del mismo título, de los autores Ortiz Villarejo, A., González, J. L., Sanz, E. y Ortiz Comas, A., publicado en Vargas-Machuca y otros (1991).- Números enteros. Madrid: Síntesis. Remitimos al lector a dicha referencia para cualquier uso del documento para fines que afecten a la propiedad de su contenido.

[2] Aspectos desarrollados de forma pormenorizada en Bell, A. (1986).

necesidades del grupo, de las características, edades y capacidades de los alumnos, de las prioridades y necesidades de carácter curricular, etc. Algo que evidentemente, excede nuestras competencias y posibilidades.

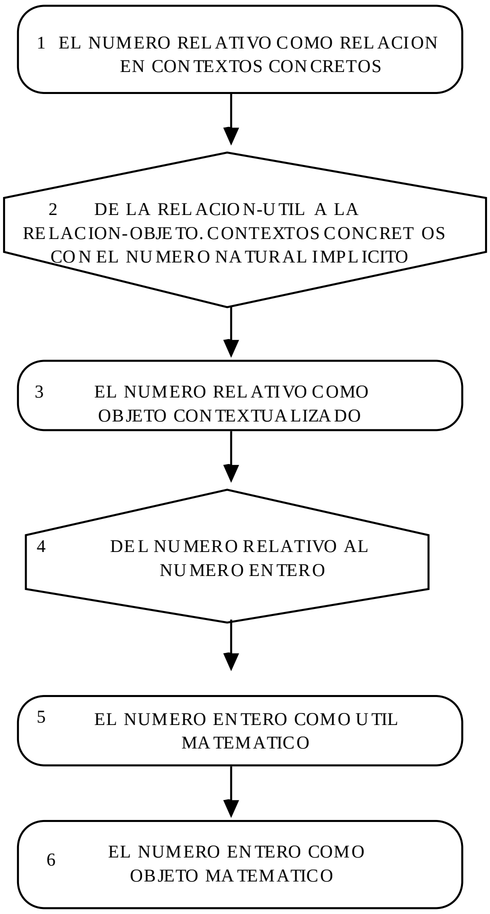


figura 1: Esquema del proceso didáctico

Se parte de lo más concreto y elemental, como son las relaciones y comparaciones cualitativas (fase 1), para concluir en lo más abstracto y complejo, como es la construcción y validación formales de los números enteros (fase 6). En dicho proceso se han de producir necesariamente dos *descontextualizaciones* o abstracciones de diferente naturaleza (fases 2 y 4): una primera, que supone el salto de *útil* a *objeto* [3] en contextos concretos, y una segunda, que supone el paso del número relativo al número entero como útil matemático. Asimismo, entendemos que existe una tercera abstracción o salto a un nivel superior, aunque esta vez implícito, en el paso de la fase 5 a la fase 6, donde por necesidades de coherencia con las teorías matemáticas conocidas se ha de definir y dotar de un cuerpo formal al número entero como útil para obtener el número entero como objeto matemático, como objeto de demostración válida.

Por otra parte, creemos que esta secuenciación se ajusta a lo que realmente ocurrió en el proceso histórico: una utilización en principio ingenua e intuitiva (número relativo) para pasar, muy pronto, al número entero como útil matemático, y, por último, después de un período excesivamente largo, desembocar en el número entero como objeto matemático. A este respecto el tratamiento didáctico usual, en el que se aborda directamente la fase 6, supone claramente una inversión del proceso histórico.

El esquema anterior tiene una estructura lógica y no pretende en absoluto reflejar un proceso lineal. Por definirlo de algún modo permite estructurar lo que debería ser un proceso *progresivo* y *acumulativo,* caracterizado por sucesivos reinicios en diversas etapas en las que se debería volver sobre los conceptos y relaciones más elementales en situaciones cada vez más complejas, para alcanzar en cada una de ellas una fase superior a la de la etapa anterior. Evidentemente, este proceso responde a las limitaciones y características de los alumnos de cada

[3] Terminología utilizada por Douady, R. (1984).

nivel así como a la naturaleza, complejidad y diversidad de las situaciones relativas aditivas[4], que pueden ir desde las más simples (comparación de dos colecciones) hasta las más complejas, tales como: homotecias, problemas de óptica (lentes) y de sonido (efecto Doppler), etc., pasando por los típicos problemas que actualmente plantea la economía, tales como: balanza de pagos, números índices, inflación, bolsa, etc., u otros más familiares como: temperaturas, cronología, etc.

a) El proceso, debe comenzar mediante la potenciación de la estructura comparativa a nivel cualitativo, y su iniciación a nivel cuantitativo (fase 1). En Primaria se reiniciaría en contextos adecuados a ese nivel, llegándose hasta la fase 2, en la que se incluirían los aspectos relativos al lenguaje y a la simbolización de estas nuevas ideas.

b) A medida que se avanza en los niveles educativos, las primeras fases del proceso se irán reduciendo progresivamente, e incluso eliminándose en algunos casos, para centrar cada vez más la atención en las fases terminales.

c) La última parte se reserva a niveles fuera ya de la Educación Primaria. En este sentido, aconsejamos abordar dicha parte allí donde las capacidades e intereses de los alumnos requieran de una validación matemática (certificado de buena conducta matemática).

3.- DESARROLLO DE LA PROPUESTA DIDACTICA.

En el presente apartado, se van a desarrollar cada una de las fases del proceso ya descrito, desde una doble perspectiva: por un lado, la explicación de los conceptos en juego, y por otro, algunas orientaciones didácticas sobre aquéllas cuestiones que nos parecen relevantes para la planificación de la intervención didáctica y del posterior desarrollo en el aula. En este sentido, se irá ilustrando la exposición, con ejemplos sugerentes y clarificadores, que en ningún caso, pretenden ser modelos de actividades a realizar directamente en el aula.

En las primeras fases, como se podrá apreciar a lo largo del desarrollo de las mismas, nos encontramos con una gran variedad de campos y situaciones contextuales que dificultan en buena medida su análisis pormenorizado. Esto es debido a que el proceso se inicia con un alto grado de generalidad (el orden y la comparación se encuentran en la mayor parte de las situaciones cotidianas), progresando por medio de sucesivas descontextualizaciones hacia campos más abstractos, y, por tanto, más restringidos en cuanto a que resúmen cada vez la complejidad de las situaciones y de las ideas anteriores. Como se puede observar, el proceso consiste en una continua simplificación de la realidad hasta llegar a la modelización matemática.

Aunque a lo largo de la exposición de las distintas fases aparecerán indicaciones didácticas al respecto, creemos necesario hacer algunas puntualizaciones previas acerca de los aspectos metodológicos:

- Es aconsejable seguir, siempre que la situación lo permita, la secuencia: manipulación-expresión oral-simbolización.

- En lo referente a la simbolización se deberían tener en cuenta los siguientes estadíos: transcripción literal, simbolización sincopada personal para llegar posteriormente a una acordada por el grupo-aula, que denominaremos simbolización contextual, y, por último, simbolización matemática estándar.

- Que las situaciones, tengan sentido (motivadoras, significativas, etc.), y provoquen la acción del alumno mediante su implicación personal.

- Que se favorezca la comunicación y el intercambio de ideas entre los alumnos.

Por último, muchas de las situaciones-actividades que se van a indicar escuetamente en las distintas fases aparecen pormenorizadas en Colectivo Periódica Pura (1982). Igualmente, haremos referencia a otras publicaciones en las que se explican con detalle actividades que aquí, simplemente, nos limitamos a nombrar.

3.1.- EL NÚMERO RELATIVO COMO RELACIÓN-ÚTIL EN CONTEXTOS CONCRETOS (FASE 1)

[4] Caracterizadas por medidas adjetivadas, dirigidas o relativas aditivas, el doble sentido y el doble signo

El modelo de las situaciones relativas que proponemos para iniciar al niño en la creación de estos nuevos conceptos numéricos tiene su punto de partida en la potenciación de la *estructura conceptual comparativa*, que con la clasificatoria y la métrica constituyen el "software" adecuado para el enriquecimiento progresivo del “mundo pensado” (Stegmüller, W., 1979).

Si se identifican los *conceptos clasificatorios* con lo cualitativo y los *conceptos métricos* con lo cuantitativo, los *conceptos comparativos* marcan una frontera entre ambos, ya que, permiten diferenciar de forma más precisa que los clasificatorios y constituyen un primer paso en la introducción de los métricos o numéricos.

Los conceptos comparativos permitirán relacionar los objetos y colecciones en función de determinadas cualidades clasificatorias. Esta relación esta constituida por términos duales tales como: "más" - "menos", "mayor" - "menor", etc., que acompañarán a la cualidad comparada y en la que uno de los objetos servirá de referencia para el otro. Así, por ejemplo, si queremos comparar dos objetos x e y en función de una determinada cualidad A, podremos proceder de dos formas distintas pero equivalentes: *"x es más A que y"* , donde la referencia es y, o *"y es menos A que x "* , donde se ha utilizado la partícula dual y se ha cambiado la referencia.

Para poder comparar a los individuos u objetos, estos deben poseer la cualidad estudiada A, siendo por tanto la relación definida entre ellos de carácter total, lo que significa que se pueden relacionar entre sí dos a dos todos los elementos de la colectividad. Al mismo tiempo, estas comparaciones son transitivas, lo que permitirá extender la relación y unificar referencias. Así, si *"x es más A que y"* y a su vez *"y es más A que z"*, entonces *"x es más A que z"*, según lo cual, se considera a z como referencia común de y y de x. La referencia u origen se puede establecer arbitrariamente; en función de que éste coincida con el primer o último elemento del conjunto según la relación, en el caso de que estos existan, o que, coincida con un elemento intermedio, nos encontraremos con el orden natural o con un orden que necesita compatibilizar las relaciones directas y recíprocas asociadas a las partículas duales.

COMPARACIONES: Afinando un poco más las consideraciones anteriores, podemos distinguir, dos clases de comparaciones: **a) de tipo estático**.- aquéllas en las que los objetos o colecciones a comparar, son independientes unos de otros, no estando ligados por ningún tipo de transformación; **b) de tipo dinámico**.- aquéllas en las que los elementos que se comparan son estados relacionados entre sí por medio de transformaciones. En este último caso, la comparación explica completamente el binomio "transformación-estados", ya que parece lógico que una transformación no sea algo aislado, sino que se encuentre estrechamente ligada a los estados sobre los que actúa. Se remite al lector a Vergnaud, G. (1985) para una información detallada acerca de las transformaciones.

NÚMEROS RELATIVOS: El paso siguiente supone el salto de las estructuras comparativas a las métricas o numéricas mediante la cuantificación de las comparaciones, lo cual no siempre es posible, dado que existen cualidades como la belleza, la bondad, etc., que no son susceptibles de ser cuantificadas con procedimientos objetivos. Este proceso de cuantificación es el que aprovecharemos para introducir los números relativos como nuevos números que representan relaciones asimétricas y transitivas que preparan la posterior construcción de Z y que constituyen un soporte para conocimientos matemáticos posteriores. Estos números serán tratados aquí como útiles o herramientas, para pasar a ser considerados en la fase siguiente (fase 3) como objetos susceptibles de manipulación y consideración especiales.

El *número relativo* será por tanto un *binomio compuesto por un número natural, que medirá la diferencia de cualidad comparada y que deberá referirse al origen común establecido, y por una de las partículas duales que marcan los dos posibles sentidos a partir de la mencionada referencia común*. A continuación, será necesario establecer un orden para este nuevo conjunto de números, y construir con ellos en la fase 3 una *aritmética relativa*. Nuestro propósito será por tanto, abstraer la estructura común a todas las situaciones relativas.

Pero, aunque el número relativo se encuentre ligado a situaciones de cuantificación, no podemos despreciar aquéllos otros hechos perceptibles en los que subyacen relaciones entre cualidades no cuantificables, y que posiblemente constituyen una apoyatura importante para la configuración definitiva del número relativo como relación-útil. Por tanto, teniendo en cuenta que el análisis cualitativo (sentidos, orden, organización, análisis global de la situación, etc.) es previo y necesario para la cuantificación, proponemos iniciar el proceso en las cuestiones más generales, en los aspectos cualitativos de las situaciones relativas para pasar posteriormente a la cuantificación. Procederemos a continuación a un análisis de la fase desde esa doble perspectiva cualitativa y cuantitativa, dejando constancia de que dicha separación es simplemente una cuestión de claridad en la exposición, ya que existirán múltiples situaciones reales en las que ambos aspectos están indisociablemente unidos.

3.1.1.- Relaciones de tipo cualitativo en contextos concretos.

Con la siguiente relación de tipos de actividades, se pretende que el alumno utilice la dualidad inherente a las situaciones de comparación, tanto a nivel lógico como lingüístico. En un principio, las comparaciones se efectuarán entre dos objetos o colecciones, para ser ampliadas posteriormente, a tres, cuatro, etc., lo que necesita del esquema de la transitividad[5] y lleva, consecuentemente, a la obtención de series ordenadas.

a) Situaciones de comparación sin cuantificación (belleza, bondad, temor, sonoridad, etc.)

b) Situaciones de comparación global y grosera de las diferencias-igualdades en magnitudes continuas perceptibles y familiares

- longitud (estaturas; con material estructurado: regletas de Cuisenaire, regletas encajables, etc.; con material no estructurado: lápices, cuerdas, etc.; en caminos y recorridos; etc.)

- Peso (estimación grosera de las diferencias: pesa más..., pesa menos..., etc. Habría que procurar, que las diferencias sean importantes y fácilmente apreciables para los alumnos; utilización de material como: balanzas simples, palancas, u otros, que sirvan para poder apreciar las diferencias a nivel cualitativo)

- Capacidad-volúmen (estimación grosera de las diferencias: cabe más..., cabe menos..., ocupa más espacio..., ocupa menos espacio..., etc.; juegos con recipientes, cubos encajables, objetos y cajas, etc., con diferencias apreciables en éstas cualidades)

c) Cronología

(antes, después, ahora, etc..; seriaciones y secuencias temporales sencillas: días de la semana, meses del año, partes del día, estaciones, etc.)

d) Numerosidad de colecciones

(hay más que..., hay menos que..., etc.; dinero y precios: cuesta más..., cuesta menos..., etc.; resultados de juegos: tiro al blanco, cromos, estampas, etc.)

e) Orden

(posiciones relativas en una serie: está antes que o por encima de, está después de..., o detrás de..., ha llegado antes que..., ha llegado después de...,etc.; resultados de juegos tales como: carreras, deportes en general, etc.; ordenaciones según las cualidades descritas anteriormente).

Los tipos de actividades enumeradas, convenientemente adaptadas a cada caso, son apropiadas para iniciar el proceso en Infantil o primer ciclo de Primaria. En el caso en que se inicie esta fase en niveles posteriores, se podrían sustituir algunas de ellas por otras situaciones tales como: economía (balanza de pagos, compras-ventas, bolsa, inflación, etc.); juegos (golf, fútbol, otros); demografía, mapas topológicos, etc., que serían más adecuadas a dichos niveles por su vocabulario así como por los conceptos y contextos implicados. En este caso, la etapa cualitativa en la que nos encontramos se reduciría considerablemente, para pasar rápidamente en el proceso didáctico a la etapa propiamente cuantitativa.

3.1.2.- El número relativo como "medida" o cuantificación de comparaciones y transformaciones. La relación-útil.

Una vez trabajadas las situaciones relativas a nivel cualitativo, se ha establecido la estructura o soporte necesario para abordar con mayor precisión dichas comparaciones. En esta parte se trata de avanzar un poco más

[5] Los esquemas de asimetría y transitividad, suponen un proceso deductivo. En el esquema de asimetría se parte de una comparación-premisa para obtener una comparación-conclusión, mientras que en el esquema de transitividad se necesitan dos comparaciones-premisas para obtener la comparación-conclusión. El esquema de transitividad presenta una tipología más amplia: mismo sentido o sentidos inversos de las comparaciones, lo que supone la inversión de una de ellas, o inexistencia del "elemento puente" necesario para obtener la comparación-conclusión.

cuantificando las relaciones.

Como ya se ha indicado, el número relativo resulta de la cuantificación en situaciones de comparación en las que intervienen magnitudes discretas o discretizables. En estas situaciones se dan tres elementos que las caracterizan: número natural contextualizado (aspectos cardinal y ordinal), origen o referencias arbitrarias y doble sentido. El número relativo aparece como una herramienta necesaria para describir y simbolizar de forma precisa las situaciones relativas, aunque todavía no se centre la atención en el número relativo como objeto. Simplemente, son ideas que permiten..., o que sirven para..., sin entrar en otras disquisiciones.

La cuantificación será en un principio de tipo binario (relación entre dos), para pasar a continuación a establecer, mediante composiciones, nuevas relaciones binarias no dadas de antemano. Veamos en primer lugar, las más sencillas, desde la doble perspectiva estática-dinámica:

a) En lo que respecta a la ***comparación estática***, podríamos considerar a modo de ejemplo:

Situación 1.- Alejandro tiene 5 ptas. y Fernando tiene 12 ptas. ¿Quién tiene más?; ¿Quién tiene menos?. Alejandro tiene......ptas. menos que Fernando. Fernando tiene......ptas. más que Alejandro.

Situación 2.- En la prueba final de velocidad realizada en el patio del colegio, el orden de llegada ha sido: Alejandro, José Luis, Fernando, Adriana, Sergio y Paloma.
Fernando ha llegado......puestos detrás de Alejandro. Jose Luis ha llegado 3 puestos.......................de Sergio. Fernando ha llegado.......puestos.........................de Paloma.

Situación3.- ¡Adivina el número!
Un alumno, anota en secreto, un número inferior o igual al número total de alumnos de la clase. A continuación, cada uno de los demás compañeros propone un número con la intención de adivinarlo. Una vez descubierto el número cada alumno indicará si acertó o no, y en caso negativo, si se pasó o no llegó y en cuanto.

b) En lo que concierne a las ***transformaciones o comparaciones dinámicas***, podemos distinguir los siguientes esquemas:
- conocidos los estados determinar la transformación.
- conocido un estado y la transformación determinar el otro estado.

Se exponen a continuación, algunas situaciones de estos tipos.

Situación 4.- Sergio tenía cinco caramelos, y su abuelo le regala dos caramelos. ¿cuantos caramelos tiene ahora? **Situación 5**.- Fernando tenía cinco caramelos y decide dar a su hermano caramelos, quedándose sólo con tres . ¿cuántos ha dado Fernando a su hermano? **Situación 6**.- Después de dar un caramelo a su hermano, Fernando tiene 5 caramelos. ¿cuantos caramelos tenía?.

c) A continuación, se pasaría a ampliar las situaciones con lo que entendemos por ***"aritmética" de transformaciones y "aritmética" relacional***, que no es más que desdoblar en el terreno aritmético la diferenciación ya mencionada sobre el carácter dinámico y estático de las comparaciones.

Una operación en la aritmética relacional puede sintetizarse como sigue: dadas dos relaciones cuantificadas en las que figura un elemento común se pretende obtener una nueva relación cuantificada entre los elementos no comunes. Esta operación supone un desdoblamiento en dos operaciones: establecer en un principio la relación cualitativa entre esos elementos no comunes y cuantificarla posteriormente. Dentro de esta aritmética se pueden establecer dos tipos de situaciones:

- Hay que apoyarse en el esquema de la transitividad: ambas relaciones están orientadas en el mismo sentido y el "elemento puente" debidamente colocado:

Alejandro tiene 5 pesetas más que Jose Luis,
Jose Luis tiene 3 pesetas más que Adriana.

Si Alejandro tiene en el bolsillo 9 ptas.,
¿Quien tiene más, Alejandro o Adriana? ¿Cuanto?. ¿Cuánto tiene Adriana en el bolsillo?.

A veces es necesario para la buena disposición del "elemento puente" invertir una de ellas,
Fernando tiene 5 pesetas más que Sergio,
Paloma tiene 3 pesetas menos que Sergio
Si Fernando tiene en total 11 ptas., ¿cuanto tiene Paloma?

Nótese que este cálculo relacional se reduce en lo cualitativo a la transitividad de la relación (a veces la asimetría) y en lo que respecta a lo cuantitativo a la suma de los números que representan la cuantificación ("distancia" entre los elementos no comunes en la serie ordenada ya obtenida).

- Los requisitos necesarios para la transitividad no se dan: el elemento común a ambas relaciones no constituye el "elemento puente" necesario para poder aplicar la transitividad. Por ejemplo:
Manoli tiene 5 pesetas más que Macu,
Alfonso tiene 3 pesetas más que Macu.

En el desdoblamiento operacional, lo cualitativo supone un proceso deductivo derivado de dos comparaciones con origen o final común, mientras que lo cuantitativo supone la complementación (sustracción).

En la *aritmética transformacional*, cualquier operación va a desdoblarse en sus dos aspectos: por una parte un aspecto cualitativo (composición de transformaciones) que determinará su sentido y, por otra, un aspecto operativo en el que se manipulará cuantitativamente con números relativos. Si las dos transformaciones están orientadas en el mismo sentido la transformación compuesta tendrá ese mismo sentido y el número que la representa será la suma de los que representan a las transformaciones componentes:

Situación 7.- Alejandro tiene cinco caramelos, su padre le regala dos caramelos, y su hermana le regala un caramelo. ¿cuantos caramelos tiene Alejandro ahora?

Situación 8.- José Luis tiene cinco caramelos y después de dar caramelos a su hermano le quedan tres caramelos; decide dar también caramelos a su amiga Paloma, quedándole solo un caramelo. ¿cuantos caramelos ha dado José Luis?.

Si por el contrario están orientadas en sentidos opuestos el sentido de la transformación compuesta lo dará la transformación componente con mayor valor cuantitativo; en cuanto al aspecto cuantitativo será el resultado del aniquilamiento o compensación entre una unidad en un sentido y la unidad en el sentido opuesto.

Situación 9.- Alejandro tiene cinco caramelos, su madre le regala dos caramelos, y da a su hermana tres caramelos.¿cuantos caramelos tiene Alejandro ahora?

El problema básico de esta aritmética será determinar la transformación que resulta de la composición de dos transformaciones. Se pueden dar directamente las dos transformaciones, bien dando una y encubriendo la otra mediante la especificación de los estados inicial y final, o bien encubriendo las dos transformaciones. Evidentemente, en cada uno de estos tipos existe la variedad que surge del juego con los dos sentidos inherentes a las transformaciones aritméticas tratadas.

A las situaciones tan elementales ya descritas, que formarían parte de juegos y actividades más generales, se les pueden adjuntar otras más completas y específicas como las siguientes:

Situación 10.- Juego del golf

Se crea en el aula o en el patio del colegio un campo de golf(un solo hoyo). Despues de efectuado un recorrido se han obtenido los siguientes datos:

Adriana ha necesitado 7 golpes para hacer el hoyo, Paloma ha necesitado 6, Fernando 5, Sergio 8, etc. ¿Quien ha dado menos golpes? ¿Quien ha dado más golpes? Adriana ha dado --- golpes más que Fernando. Sergio ha dado --- golpes --- que Paloma, etc.

Situacion 11.- Monopoly.

Cuando los alumnos estén familiarizados con este juego se podrán crear situaciones de compra-venta, balances, etc., que se podrán ampliar en las distintas fases del proceso con otras situaciones económicas más generales y usuales en la vida diaria, tales como: haberes-débitos, bolsa, balanza de pagos, etc.

Situación 12.- Juegos con dados. Se pueden utilizar dos tipos de dados: uno numérico y otro con dos colores para indicar sentidos de desplazamientos u otras transformaciones (añadir-quitar, disminuir-aumentar, etc).

La riqueza y variedad en cuanto a reglas, organización, etc., de estos tipos de juegos, es impresionante, proponiendo al lector, a modo de ejercicio, que trate de imaginar el mayor número posible de variantes.

3.2.- DE LA RELACIÓN-ÚTIL A LA RELACIÓN-OBJETO (FASE 2)

Quizás una de las cuestiones claves del proceso que estamos tratando sea la de elevar la relación numérica como útil o herramienta a la categoría de objeto, de ente con existencia propia y en cierto modo independiente de las referencias "absolutas" que la originaron. Es el resultado de un proceso de abstracción o focalización de la atención sobre determinados aspectos de un campo de conocimientos, despreciando u obviando los demás. Esta es la difícil tarea que nos proponemos plantear en éste apartado: lograr mediante situaciones didácticas adecuadas, la *transición* del contexto "absoluto" de cuantificación, al contexto "relativo"; pasar del número relativo en su acepción de relación-útil al número relativo en su acepción de relación-objeto. Las situaciones son las mismas para ambas interpretaciones, es decir, seguimos estando en contextos concretos, y por este motivo seguimos hablando de relación para reforzar la idea de que los números relativos como herramientas u operadores, como resultados de comparaciones o como elementos que permiten transformaciones, deben ir progresivamente adquiriendo significado en sí mismos sin perder los anteriores, para terminar describiendo las situaciones sin necesidad de hacer referencia a las cantidades o posiciones comparadas y/o transformadas. Es una cuestión de **economía** o de simplificación de las situaciones relativas.

El planteamiento anterior, se puede ver reflejado en la continuación de la situación iniciada en el apartado anterior en relación con el juego del golf. Así, se podría proponer en clase la siguiente situación:

Situación 13.- En este juego participan 20 alumnos; el número de golpes realizado por cada jugador para conseguir el hoyo ha sido: Adriana 7, Paloma 6, Fernando 5, Sergio 8, Jaime 10, David 11, etc .

A continuación se trata de encontrar una referencia (recorrido normal) que economice la expresión de los resultados obtenidos. Esta referencia se puede dar directamente, o bien puede ser construida por los alumnos: mediante el resultado que más se repite (moda) o por sucesivas acotaciones en virtud de la facilidad-dificultad para realizar el hoyo con un determinado número de golpes (15 golpes es muy fácil, 1 golpe es muy difícil, 9 golpes es fácil, 3 golpes es difícil, etc.)

Una vez obtenida esta referencia, que podría resultar de un debate y un posible consenso entre todos los integrantes del grupo, se trataría de describir los resultados mediante comparaciones con ella: Sergio ha dado 3 golpes por encima de lo normal, Fernando ha dado 1 golpe por debajo de lo normal, etc.

Esta situación puede trasladarse a los resultados de un campeonato de golf:

Situación 14.- En un cierto campeonato de golf, se han dado los siguientes resultados en la primera jornada: jugador A 77 golpes, jugador B 72 golpes, jugador C 72, jugador D 68, jugador E 70, jugador F 66, jugador G 73, jugador H 75, jugador J 72, jugador K 77, jugador L 73, y jugador M 69.

Admitiendo como "recorrido normal" (par del campo) el de 72 golpes se debería procurar que los alumnos describieran la situación en función de éste nuevo origen:

- el jugador A, ha dado 5 golpes por encima del par (5 sobre par).
- el jugador B, ha dado 3 golpes bajo par; ....

A partir de aquí, se pasaría a ordenar los resultados con estos nuevos términos, relacionando siempre la última ordenación con la efectuada anteriormente. Del mismo modo se debería prestar atención a la simbolización, con actividades encaminadas a la confección de diagramas, esquemas, gráficos, etc., como los indicados a título de ejemplo en las figuras 3,4 y 5.

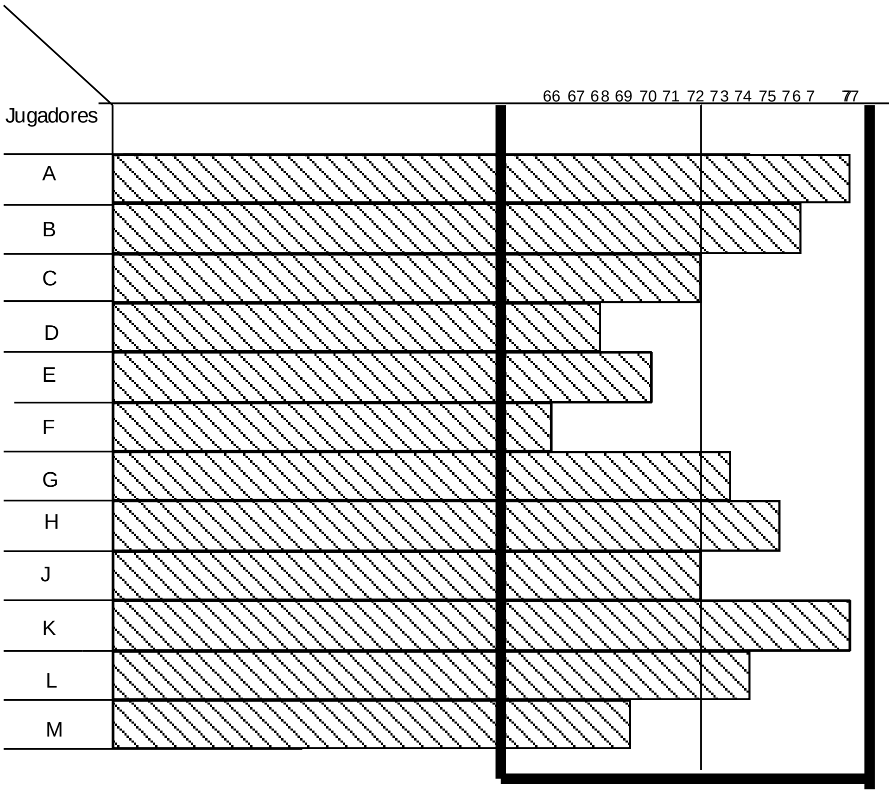


figura 3

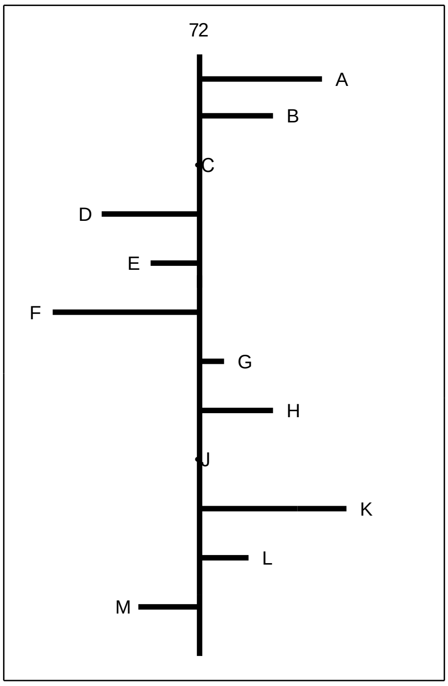


figura 4

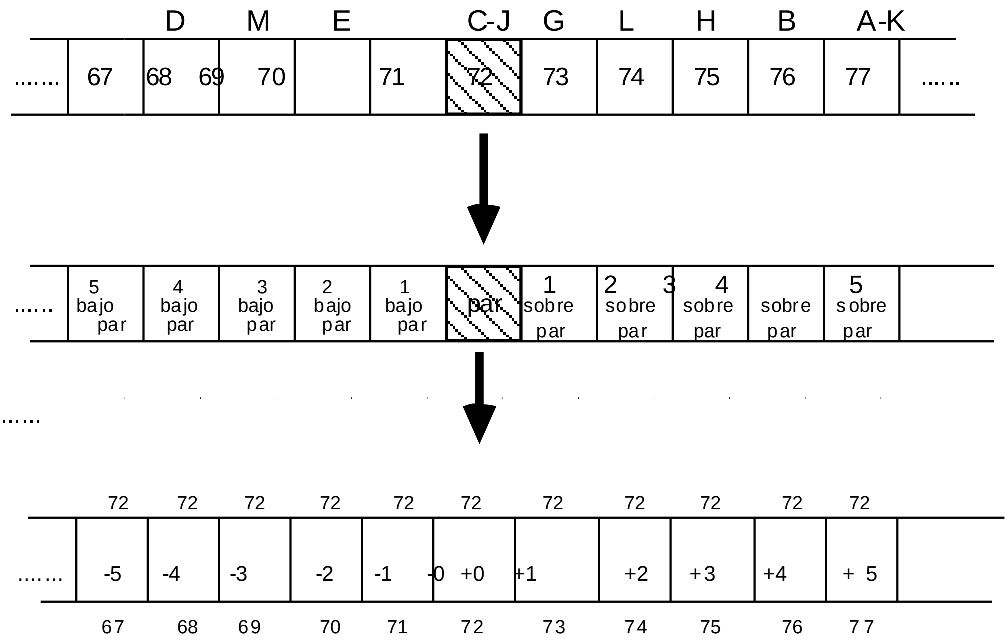


figura 5

En este tipo de diagramas se aprecia, por una parte, el paso del orden natural al orden relativo, y, por otra, la simplificación de cantidades que se produce como consecuencia del mismo. En las figuras 3 y 4 se refleja el salto del contexto absoluto al relativo mediante el análisis del contorno de la representación absoluta, para lo que se necesita establecer una "normalidad" que dará lugar a la dualidad correspondiente. En la figura 5 se refleja este mismo hecho, aunque en un marco ordinal. Se pasa de la serie absoluta a la serie relativa con una simbolización contextual para finalizar con la simbolización matemática estándar.

Otras situaciones que pueden favorecer el salto al número relativo como objeto son las siguientes: En fútbol, por ejemplo, se podría tratar una nueva forma de clasificación por goles como la representada en la figura 6, en donde la columna de resultados se deberá obtener razonadamente a partir de las comparaciones y las transformaciones asociadas correspondientes, o como la reflejada en la tabla de la figura 7.

Equipos	Goles a favor	Goles en contra	Resultado
A	45	48	-3
B	38	35	+3
C	67	58	+9
D	46	49	-3
E	50	50	0

figura 6

Equipos	Partidos ganados	Partidos perdidos	Resultado
A	12	8	+4
B	14	6	+2
C	8	12	-6
D	9	11	-1
. . .	. . .	. . .	. . .

figura 7

Otras situaciones que se pueden aprovechar para facilitar el paso mencionado, son las que conllevan transformaciones como: ganar-perder; añadir-quitar; subir-bajar (en listas de discos más vendidos, clasificaciones deportivas; etc.); nacimientos-defunciones; etc..

Se deja al lector, el ejercicio de plantear situaciones didácticas adecuadas a este nivel en las que intervengan las transformaciones anteriores.

Otra cuestión a tener en cuenta en esta fase es la relacionada con el ***cero relativo***, el cual resulta del cambio de origen, de las relaciones comparativas de igualdad, de la transformación nula, bien aislada como tal, bien como resultado de composiciones, etc. Esta idea aparece en las situaciones planteadas asociada con: el par del campo; acierto del número secreto; igualdad de goles a favor y en contra; igualdad de partidos ganados y perdidos, igualdad de ganancias y perdidas, etc.. Ideas que derivarán en el cero relativo y tendrán matices propios dentro del proceso de simbolización. Téngase en cuenta que la noción de cero relativo surge a partir de una relación de coincidencia, básicamente distinta a la relación de precedencia que da lugar al resto de dichos números[6] .

Un material didáctico que puede favorecer el paso del número relativo como operador (útil) al número relativo como estado (objeto), que se encuentra implícito en las figuras 4 y 5 de la situación 13, es la "regla relativa"; un instrumento para "medir" situaciones relativas. Se trata de una regla normal graduada, pero en la que el origen se encuentra en el centro de la misma (figura 8). Este material, se podrá elaborar también en forma de bandas, del tipo de la utilizada en la figura 5.

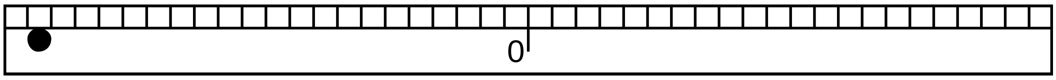


figura 8

El Profesor, deberá utilizar este recurso entre otros, para intentar que los alumnos se familiaricen con el origen relativo y el doble sentido característico de las "mediciones" relativas.

3.3.- EL NÚMERO RELATIVO COMO OBJETO CONTEXTUALIZADO (FASE 3).

Con el proceso seguido hasta aquí se han construido nuevas ideas numéricas que describen de forma precisa y económica determinadas situaciones de comparación y transformación. En lo que sigue, se pretende:

a).- Continuar la labor realizada en las fases anteriores dando un mayor protagonismo al número relativo y completando el trabajo ya iniciado con situaciones más complejas.

b).- Analizar nuevas situaciones (cronología, temperaturas, alturas sobre el nivel del mar, etc.), que por diversos motivos (magnitudes dirigidas o sin principio ni fin, escalas con cero inexistente o no accesible, etc.) no se adaptan al orden natural y, por tanto, fueron inicialmente concebidas con una estructura relativa. En ellas, el proceso descrito en las fases anteriores está ya resuelto y se nos presenta como un conocimiento social fuertemente arraigado. En consecuencia, por las dificultades inherentes a las mismas, no parece conveniente su construcción desde el principio, por lo que nos limitaremos simplemente a recogerlas y aprovecharlas a partir de esta fase.

c).- Operar con éstos nuevos números (aritmética con números relativos) para resolver situaciones problemáticas planteadas en los contextos tratados y potenciar las estructuras aditivas y multiplicativas, cuyas propiedades se empezarán a construir aquí de forma intuitiva para ser institucionalizadas en fases posteriores mediante los esquemas y tablas de extrapolación inductiva. Dichos aspectos operacionales, junto a los tratados hasta aquí, constituirán el armazón de los números enteros.

d).- Culminar el proceso de simbolización.

e).- Culminar la estructura de orden sin principio en dominios numerables.

Las cuestiones d) y e) se encuentran inmersas en todas las actividades que se propondrán en los tres primeros apartados, por lo que no recibirán aquí ningún tratamiento especial.

3.3.1.- ***<u>Continuación fases anteriores.</u>***

Aquí, además de continuar el proceso ya descrito con las situaciones trabajadas a nivel cualitativo y

[6] Para un desarrollo pormenorizado de estas cuestiones, se remite al lector al capítulo 3 de la publicación de la Editorial Síntesis indicada en la primera página. En dicho capítulo se analiza la naturaleza y existencia del número entero.

cuantitativo, ampliando el grado de dificultad y relacionándolas entre sí, se deberían plantear nuevas actividades en contextos más complejos y distintos a los ejemplificados hasta ahora; nuevos temas y situaciones con la misma estructura lógico-matemática, y, por tanto, con el mismo proceso ya establecido (a partir de las comparaciones y transformaciones cualitativas y cuantitativas) pero con distinto contenido social, significados, dificultad, etc..

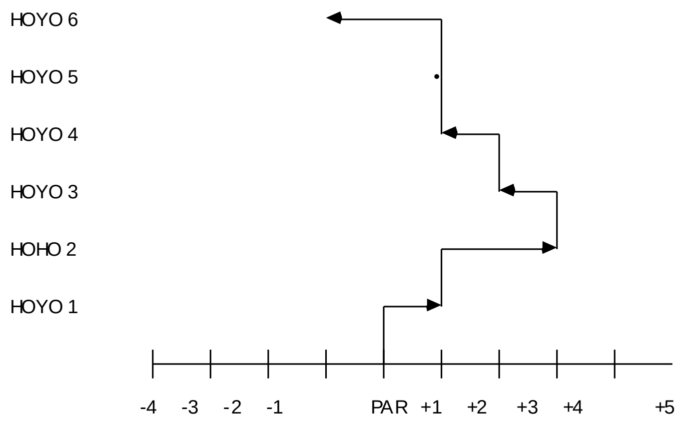
El planteamiento didáctico de estas nuevas situaciones, en el que lógicamente se simplificarán los trabajos preliminares de fases anteriores, tiene una doble justificación: por un lado sirven para construir ideas numéricas relativas y fundamentar el trabajo matemático posterior; por otro, son intrínsecamente interesantes desde el punto de vista socio-cultural, y, por tanto, necesarios desde un enfoque más general (preparación para la vida, formación integral, etc.). Veamos a continuación, algunas indicaciones referentes a este apartado, analizando en principio, la continuación de la situación del golf y de otros deportes.

En lo que respecta al golf, se debe llevar la situación, a la descripción de los resultados obtenidos en cada uno de los hoyos del recorrido, una vez establecido en cada uno de ellos el par correspondiente. A modo de indicación, se propone la utilización de tarjetas como las reflejadas en las figuras 9 y 10.

HOYOS	GOLPES	PAR HOYO	RESULTADO
1º	4	3	+1
2º	5	3	+2
3º	4	5	-1
4º	2	3	-1
5º	4	4	Par
6º	5	3	-2

TARJETA 1

figura 9



TARJETA 2

figura 10

A continuación, se podrá tratar el resultado por acumulación de varias jornadas, tal y como se representa en las figuras 11 y 12.

Jor. / Jug.	1ª	2ª	3ª	4ª	Total
A	+2	-1	+3	-2	+3
B	-1	Par	-1	+2	Par
C	+2	+2	-1	Par	+3

figura 11

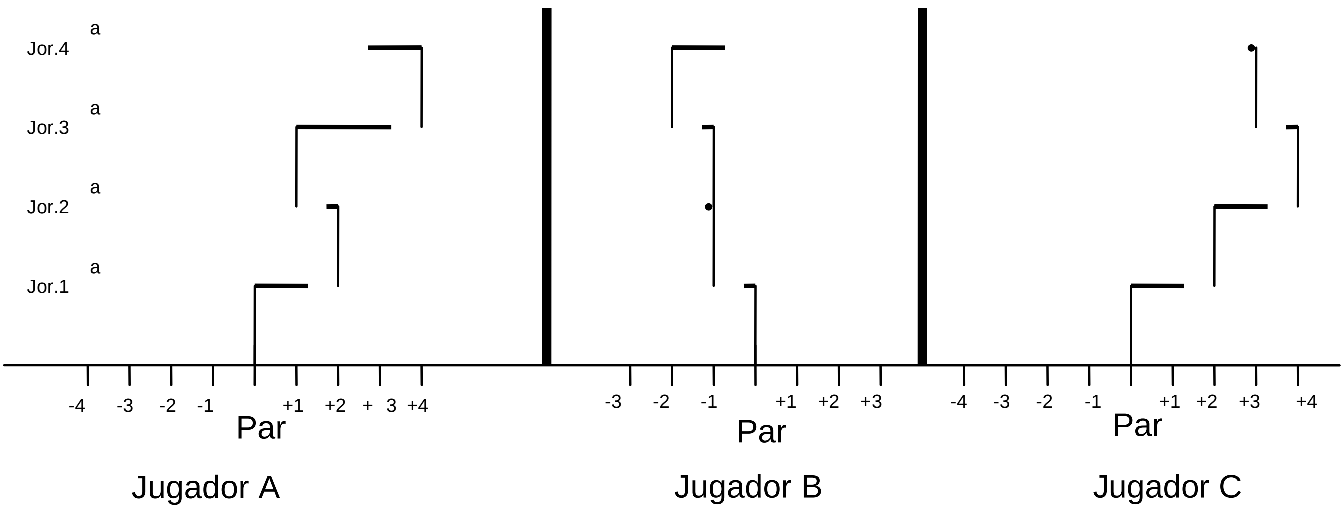


figura 12

El proceso descrito podría llevarse a cabo igualmente para el caso de las clasificaciones de fútbol (puntos negativos y positivos ordinarios) o de otros deportes. Igualmente se puede continuar con los juegos de dados iniciados en fases anteriores. Aquí, cada tirada se representaría mediante un símbolo único (número relativo), iniciándose la aritmética relativa con actividades tales como: el resúmen de varias tiradas en una sola. En esta fase aparecerán a nivel intuitivo algunas propiedades de estos nuevos números (anulación-opuesto y conmutatividad).

Otras actividades-situaciones que habría que retomar o trabajar serían las relativas a la Economía (bolsa, saldos bancarios,etc.) o a la medida horaria clásica (reloj de manecillas), en las cuales se utilizan dos referencias y dos mediciones relativas: minutos antes y después de las 12 y hora a.m. y p.m.. Se deja al lector la tarea de reflexionar sobre este tipo de situaciones, tomando como referencia las indicaciones que aparecen en este apartado.

3.3.2.- *Nuevas situaciones.*

Como ya se ha mencionado en la introducción del presente apartado, se pretenden analizar aquí situaciones no contempladas hasta ahora, con idea de incorporarlas al proceso didáctico, precisamente en esta fase, puesto que por sus características, no son susceptibles del tratamiento usual dado al resto de las situaciones que hasta ahora hemos planteado. Todas son situaciones relativas especiales; familiares en la medida en que son de una enorme utilidad, formando parte muchas de ellas, del conocimiento "vulgar". Además, son conocidas como las típicas situaciones-ejemplos para el tema que estamos tratando, ya que casi todas, fueron concebidas originalmente con la estructura y propiedades que pretendemos que el alumno construya en el aula. Por otra parte, se trata de cuestiones que además de tener sentido en sí mismas - conocer las temperaturas y el manejo de la cronología y el tiempo en general, tienen un interés intrínseco -, son adecuadas para un tratamiento didáctico interdisciplinar en virtud de sus múltiples conexiones con otras áreas de conocimiento (Ciencias Sociales, Ciencias Experimentales, etc.).

A continuación, haremos una breve referencia a los siguientes temas: *temperaturas*, *cronologías*, *observaciones de la naturaleza* (alturas sobre el nivel del mar, curvas de nivel, localización, etc.), *planisferio*, etc., incluyendo algunas observaciones didácticas.

A) **Temperaturas.**

En primer lugar, para familiarizar al alumno con la terminología e instrumentos usuales de este apartado, se podrán realizar actividades en el propio Centro Escolar, como las siguientes:

Situación 15.- Realizar gráficas de temperaturas tomadas cada hora, en diferentes puntos durante un jornada escolar (figura 13).

Situación 16.- Experimentos con agua, hielo, etc., estudiando las temperaturas y sus evoluciones, en diferentes mezclas.

Situación 17.- Partiendo de un listado de ciudades con las temperaturas máximas y mínimas correspondientes (figura 14), se analizaría el significado de esta información para pasar a continuación a realizar comparaciones y transformaciones en problemas relacionados con el mencionado listado.

Hora	Temp.
10	12º
11	14º
12	17º
15	20º
16	23º
17	24º

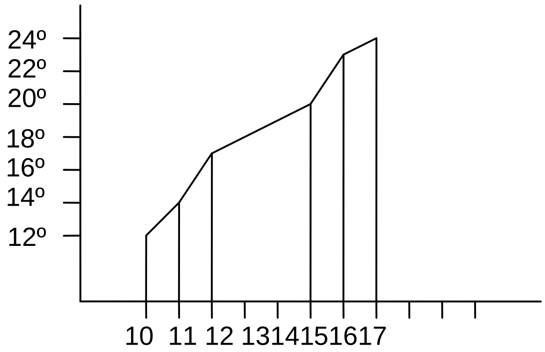


figura 13

Ciudades	Temperatura max.	Temperatura min.
A	20 º	7º
B	15º	2º
C	7º	-2º
D	5º	-7º
E	8º	-1º

figura 14

Del mismo modo, a partir de los datos de la tabla de la figura 14, se pueden plantear cuestiones como las siguientes:

Situación 18.- Indicar la diferencia entre las temperaturas máximas y mínimas de las ciudades A y B.

Situación 19.- Ordenar de menor a mayor, las temperaturas máximas, las mínimas, las diferencias en cada ciudad, etc.

Situación 20.- En una determinada ciudad, la temperatura aumenta a razón de un grado por hora desde las 10 hasta las 19 horas, disminuyendo a partir de aquí a razón de 2 grados por hora hasta las 10 h. del día siguiente.

El Profesor, debería tratar de que los alumnos analizaran en profundidad (con gráficos, tablas, etc.), este tipo de situaciones.

B) **Cronologías**

El conocimiento de las distintas cronologías (occidental, islámica, oriental, etc.), es importante para poder disponer de referencias en el estudio y comprensión de los hechos históricos. Este tipo de situaciones, junto a las correspondientes a calendarios, estaciones, medida del tiempo, etc., se completarán aquí, tratando de que el alumno llegue a un conocimiento lo más completo y razonado posible.

Una vez que los alumnos se encuentran en poder de interpretaciones correctas acerca de la cronología occidental, se podrían llegar a plantear cuestiones como:

Situación 21.- Los inicios de la civilización griega se datan en el año 600 aC. ¿cuantos años hace de tal fecha?.

Situación 22.- Adriana en 1989 dispone de una nave, con la cual puede viajar en el tiempo. Decide avanzar 132 años. ¿A que año viaja?.¿Y si retrocediese 2002 años, en que año se encontraría?

Situación 23- Explicada la cronología islámica, se podrían trasladar a esta, fechas de la cronología occidental.

C) Observaciones de la naturaleza

Las alturas sobre el nivel del mar, la profundidad del fondo marino, las representaciones por curvas de nivel, etc., son algunas de las cuestiones que se tratarían aquí, englobadas bajo un epígrafe que podríamos llamar: *medidas relativas en la naturaleza*, el cual abarcaría tanto lo incluído en este apartado como en el siguiente.

Entre otras situaciones ya conocidas, son interesantes, las que se refieren a la interpretación y manipulación de mapas topográficos, en los que se suelen utilizar, números relativos para indicar alturas por encima y por debajo de una linea horizontal imaginaria que suele ser el nivel del mar. En este sentido, proponemos la realización con un enfoque interdisciplinar, de actividades de interpretación de mapas topográficos, construcción de perfiles, etc., como por ejemplo el indicado en la figura 15.

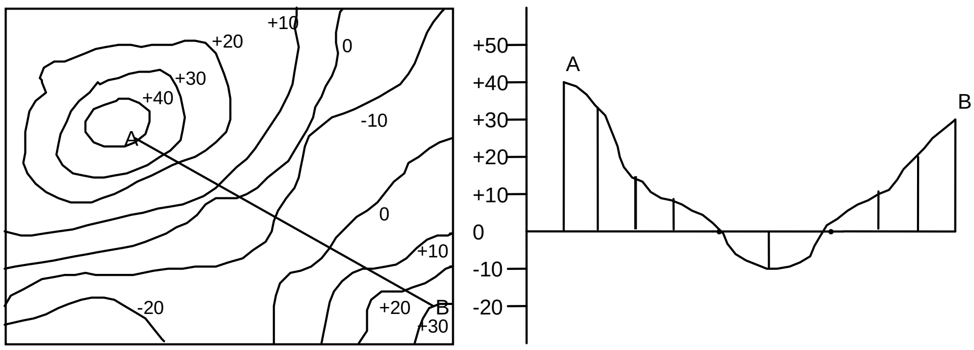


figura 15

En los gráficos anteriores, se ha trazado sobre el plano, una línea que representa un camino hipotético entre los puntos X e Y. A partir de aquí, se construye el perfil en alzado de dicho camino, para comparar posteriormente las diferentes alturas de determinados puntos del mismo, tomando como referencia un punto A cualquiera. Aquí, se podría utilizar la regla relativa para efectuar mediciones

D) Planos y mapas. Planisferio.

El conocimiento de las referencias que se utilizan para localizar sobre la esfera terrestre (meridianos, paralelos, longitud-latitud, husos horarios, etc.), son importantes en Geografía, y constituyen situaciones relativas interesantes para el tema que nos ocupa. En este apartado, existen numerosas actividades y situaciones didácticas, que el Profesor debería aprovechar en el aula. Así, se podrían plantear situaciones como las siguientes:

- localización de puntos sobre mapas, planos y esfera terrestre.

- diferencias horarias entre ciudades.

Un recurso didáctico que se puede utilizar a partir de éste momento, es lo que llamamos *plano relativo* (figura 16) que no es otra cosa que la ampliación a dos dimensiones de la regla relativa ya mencionada (figura 8).

Este recurso, se puede utilizar como instrumento para: localizar, medir, situar, efectuar movimientos, etc., sobre planos y gráficos de dos dimensiones (Inicio a la utilización de coordenadas como marco fundamental para el trabajo con números relativos según Bell, A. (1982)). Así, se podrían desarrollar en el aula, juegos y situaciones como los siguientes:

Situación 24.- Localización sobre mapas.
Tomando distintas referencias, se describirían diversos lugares en términos relativos.

Situación 25.- Búsqueda del tesoro.
Sobre un plano, localizar el tesoro escondido a partir de una serie de mensajes que se refieren a desplazamientos, medidas relativas, etc.

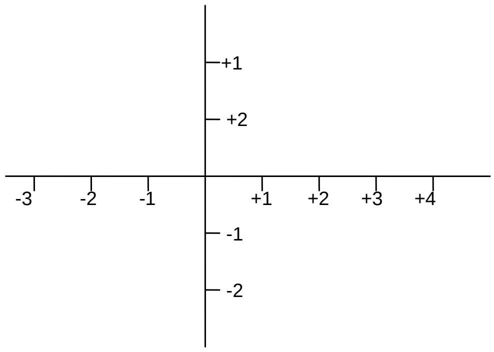


figura 16

3.3.3.- *Aritmética relativa.*

Hasta ahora, se han debido plantear situaciones que requerían del uso de la transitividad, de la idea de elemento simétrico, de las composiciones de relaciones o transformaciones, etc., como instrumentos que permitían la extensión a más de dos objetos o estados, para resolver dichas situaciones desde un punto de vista cualitativo, o bien, desde un punto de vista cuantitativo, como instrumentos auxiliares en contextos meramente absolutos.

A partir de la fase anterior, se supone que el número relativo ha debido alcanzar entidad por sí mismo con independencia de las cantidades naturales sobre las que se construye, constituyéndose así en un objeto conceptual todavía contextualizado (referencias reales), que puede jugar ya el doble papel de estado y de operador, lo que en cierto modo obliga a regular su funcionamiento, con el fin de completar el perfil estático-dinámico que caracteriza a todas las ideas numéricas. En este apartado, analizaremos la aritmética con números relativos a modo de preparación a las operaciones usuales con números enteros.

Antes de entrar en las consideraciones propias del apartado, hemos de volver a insistir una idea básica para entender el proceso que proponemos: El número relativo como objeto, presenta una gran variedad de significados tanto por sí mismo, como ya hemos visto, como ante su funcionamiento operacional, como veremos en este apartado. De esa riqueza de significados y aplicaciones distintas, intrínsecamente interesantes, se deberá confluir en las fases siguientes, hacia la estructura, reglas y propiedades **comunes** a todas ellas.

En las situaciones concretas del tipo que venimos utilizando, hay que decir que predomina fundamentalmente la estructura aditiva (composiciones y/o transformaciones en las que intervienen estados de "*una misma*" magnitud, en donde se incluye la multiplicación como operación externa ("nº de veces" un número relativo)). En cuanto a la estructura multiplicativa propiamente dicha (número relativo x número relativo = número relativo), es de notar:

a).- que las situaciones en las que aparece, son más restrictivas, menos frecuentes en lo cotidiano que aquéllas que presentan estructura aditiva, si bien, son muy importantes en algunas Ciencias (Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales (Economía, Geografía Humana, etc.)).

b).- que la presentación usual es bajo la forma de multiplicación de magnitudes dirigidas (velocidad relativa x tiempo = espacio relativo; tiempo x rendimiento temporal = situación financiera relativa, etc.).

c).- las magnitudes relativas factores deben estar relacionadas o encadenadas entre sí. La continuación de este proceso didáctico incluirá las situaciones multiplicativas en general sin ningún tipo de restricciones.

d).- a este tipo de multiplicación la llamaremos "pseudo-interna", en el sentido de que por un lado, se podría pensar en el carácter interno de la misma, dado que se opera con números relativos para obtener números relativos, y por otro, nos encontramos con la particularidad de que los números tienen significados contextuales distintos en cada caso (por lo que no podemos definitivamente catalogar de interna a dicha operación, la cual alcanzará tal categoría, cuando se descontextualice en la fase siguiente y adquiera pleno sentido matemático).

3.3.3.1.- Estructura aditiva.

En las situaciones descritas en los apartados anteriores, puede aparecer la necesidad de obtener resultados que resúman tiradas consecutivas, movimientos, resultados parciales, etc., como por ejemplo se indica en la tarjeta 2, figura 7. En estos casos es imprescindible desarrollar procedimientos y técnicas algorítmicas que permitan una manipulación rápida, sencilla y eficaz de las situaciones relativas. Las regularidades y características de dichos procedimientos y técnicas constituirán la base de la estructura aditiva de los números enteros.

- Primeras incursiones en la adición de números relativos.

En el juego del golf se podrían plantear los resultados de varios jugadores en dos hoyos, tratándose de encontrar una manera de ordenarlos en función de los resultados globales. Lo más sencillo es recurrir a una entrega de premios, para lo que hay que averiguar previamente los resúmenes de cada jugador y el orden de los mismos. En este sentido, la disposición ordenada de una serie de números relativos, se ha de trabajar de antemano, o bien, aprovechar este tipo de situaciones, trasladando el orden natural a la serie relativa resultante. Aparecerían aquí dos tipos de procedimientos, para resolver las tres posibles situaciones aditivas:

a).- sobre par - sobre par (positivo-positivo)

bajo par - bajo par (negativo-negativo)

En estos casos, como ya se ha indicado en la fase 1 y que se supone en este punto lo suficientemente trabajada, se componen dos relaciones de la misma naturaleza para dar lugar a una relación de igual naturaleza que las compuestas (en lo que se refiere al aspecto cualitativo). En lo que concierne al aspecto cuantitativo, se utiliza la suma natural para llegar al resultado correcto. A este respecto, creemos que a nivel de significados no debe suponer dificultad alguna para el alumno resumir resultados de la misma naturaleza, ya que es evidente que estas composiciones suponen una aplicación-ampliación de la aritmética natural. Lo que no parece tan evidente es la simbolización del proceso, a lo que habría que dedicar ahora una especial atención. Dicha simbolización (figura 17) presenta la misma problemática y características que la de la aritmética natural, con la ventaja añadida de que no es la primera vez que se simbolizan acciones con objetos matemáticos.

	1ª Jug.	2ª Jug.	Resul.	
A	+5	-2	+3	+5 +(-2) = +3
B	-2	+3	+1	-2 + (+3)= +1
C	-1	-4	-5	-1 + (-4) = -5
D	+3	+2	+5	+3 +(+2) = +5

figura 17

b).- sobre par - bajo par (positivo-negativo).

Nos encontramos aquí, ante cualidades opuestas. Como ya se mencionó en el apartado 3.1.2, el resúmen se obtendrá en estos casos por medio de procesos de anulación-compensación.

Creemos que este procedimiento debe suponer una mayor dificultad para el alumno que el anteriomente expuesto, y por tanto, se debe insistir más en él mediante experiencias diversas, como por ejemplo:

- Juegos con fichas de dos colores (Breard C., 1970).

- Juegos con dados de colores y de números.

- Juegos de premios y multas; etc.

A continuación se pasaría a trabajar situaciones en las que el número de jugadas sea superior a dos, apareciendo distintos procedimientos:

1) efectuar de dos en dos progresivamente utilizando los procedimientos anteriores (utilización de la propiedad asociativa).

2) anular-compensar de diferentes maneras.

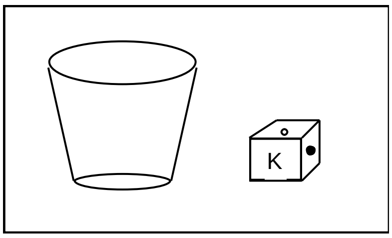
3) operar con positivos y negativos por separado para anular-compensar posteriormente.

Otras actividades-situaciones que se podrían utilizar son: temperaturas (aumentos-disminuciones sucesivas); ascensores; bolsa (movimientos sucesivos: semanales, mensuales, etc.); deportes (en fútbol, acumulación de positivos y negativos en varias jornadas); juego de dados; etc.

Por su especificidad y riqueza, analizaremos a continuación un juego de dados popularmente conocido por "chirulo" así como algunos juegos de cartas con números relativos como adelanto a la descontextualización definitiva de la fase siguiente.

CHIRULO

El "Chirulo" es un juego de dados que consiste, como el lector ya sabe, en sacar el máximo número de figuras iguales en tres tiradas consecutivas de los cinco dados de que consta el cubilete, con la particularidad de que el jugador elige una figura, y solo vuelve a tirar aquéllos dados que no la presentan, pudiendo doblarse(tirar todas de nuevo) cuando antes de iniciar la tercera tirada todos los dados presentan dicha figura.



Como el juego es lo suficientemente conocido no nos detendremos en explicar las reglas del mismo. Tan sólo expondremos una experiencia que hemos realizado sobre el cómputo del juego.

El sistema clásico de registrar los resultados de este juego es el de computar los puntos obtenidos en cada tirada y de cada figura. El resultado de una partida entre dos jugadores podría ser la que figura en la siguiente tabla.

	Ale	Paco	Antonio
Ases	18	12	12
Reyes	20	25	15
Caballos	12	16	12
Jotas	12	9	9
Rojos	8	6	8
Negros	4	2	3
TOTALES	74	70	59

Nuestra experiencia comenzó, con la exposición de las reglas del juego a niños de 10 años. Durante el desarrollo del mismo, ellos se encargaban de computar en cuadros semejantes al descrito anteriormente, los resultados de las distintas jugadas. Es de destacar el interés que mostraban y la colaboración con el que apuntaba, cuando este tenía dificultades en encontrar el valor exacto de cada tirada (uso de la tabla de multiplicar por 1, 2, 3, 4, 5 y por 6):

"4 caballos por 4 puntos que vale cada uno 16 puntos"

"5 damas por 3 puntos cada una dan 15 puntos"

o cuando tenía que calcular el total de puntos de cada jugador procediendo a calcular la suma de todas las tiradas parciales.

Una vez que jugaban con cierta facilidad y destreza se acordó simplificar el proceso de cómputo del juego. La modificación que se introdujo consistió en elegir como referencias 4 figuras para cada uno de los tipos siguientes: negros, rojos, jotas(J), caballos o damas(Q) y reyes(K) y 3 figuras para el caso de los ases (podríamos haber introducido otras referencias). De esta forma las anotaciones se simplificaron y se podía obtener con poco "cálculo" el resultado del juego.

Las anotaciones quedaban con este nuevo procedimiento de la siguiente forma:

"5 caballos son uno más de lo normal, lo que significa 4 puntos más (+4)."

"3 rojos son uno menos de lo normal, lo que significa 2 puntos menos (-2)."

Los resultados quedaron por tanto registrados de la siguiente forma:

	Ale	Paco	Fernad o
	24	18	12
	20	25	20
	16	20	24
	12	12	15
	12	6	8
	4	3	4
Totales	88	84	83

→

Ale	Paco	Fernando
+6	0	-6
0	+5	0
0	+4	+8
0	0	+3
+4	-2	0
0	-1	0
+10	+6	+5

Con esta nueva notación, el problema podría surgir en el momento de obtener los resultados finales. Pero pudimos constatar con sorpresa que los niños operaron sin ningún tipo de dificultad y sin ayuda alguna con estas nuevas cantidades, utilizando en la mayoría de los casos procedimientos de anulación-compensación.

SUMA CERO

Material: 41 cartas numeradas desde -20 hasta +20.

Número de jugadores: 3 ó 4.

El juego comienza con el reparto del total de cartas entre los jugadores, menos cuatro de ellas elegidas al azar, que se colocan descubiertas sobre la mesa.

Cuando a cada jugador le llegue su turno de juego, deberá echar una carta en la mesa. Si con ella, puede hacer suma cero con una o varias de las cartas de la mesa, las retirará y las colocará en su montón particular. Ganará el jugador que más cartas haya conseguido al finalizar el juego. Una variante de este juego, es el que hemos denominado "CERO EN LA MESA", en el que ganará el jugador que consiga hacer suma cero con las cartas presentes en la mesa.

SIETE Y MEDIA RELATIVA

Con el mismo material y para el mismo número de jugadores, este juego consiste en acercarse lo más posible a cero, mediante la suma de los puntos de las cartas que una a una y hasta un total de siete, se irán entregando a los jugadores. Cada jugador podrá "plantarse" (no recibir más), cuando lo estime oportuno.

- La suma y la resta como dos caras de la misma moneda.

Las operaciones de sumar y restar, se presentan en un principio como distintas a nivel de significaciones concretas (como acciones con números relativos), aunque integrables posteriormente (fase 6), en una sola operación a nivel matemático, como consecuencia de las propiedades que se deducirán a partir de aquí. El proceso que proponemos, se basa por tanto en esta consideración: una iniciación diferenciada sobre la base de significados distintos, como continuación de las interpretaciones usuales de la aritmética natural, para pasar progresivamente a través de la toma de conciencia de las propiedades típicas de la estructura aditiva, a considerarlas como dos aspectos complementarios de la misma operación.

Como continuación de la interpretación natural, tendríamos:

A) **Sumar** puede significar: hacer..., añadir..., agregar..., componer..., resumir..., etc., con números relativos.

B) **Restar** puede significar: deshacer..., quitar... o eliminar..., descontar... o anular..., descomponer..., etc., con números relativos.

Las situaciones aditivas ya iniciadas con la suma como operación general, se deberían seguir trabajando al mismo tiempo que se introducen situaciones de restas con los significados anteriores. En este caso, se trata de actividades menos frecuentes, más rebuscadas, pero no por ello menos significativas y "normales" que las correspondientes a la suma como veremos a continuación. Aquí hemos de volver a insistir en la idea central que ilumina toda la propuesta: propiciar un cúmulo de experiencias puntuales y diversas sobre situaciones relativas, por definición dispares y con distintos contenidos y significados, para construir progresivamente la estructura lógica común a todas ellas.

Algunas actividades-situaciones que pueden desembocar en la utilización de la resta como procedimiento que permite la resolución, son las siguientes:

a) Descontar o eliminar el resultado de una jugada ya realizada, de un movimiento bancario equivocado, etc.. Ejemplo: al finalizar una jornada de un campeonato de golf, se anulan los resultados obtenidos en uno o varios hoyos.

b) Elegir después de cada jugada, y en función de los resultados de las anteriores, las k mejores de todas las realizadas hasta ese momento, anotando las puntuaciones parciales por jugador, con idea de conocer la clasificación antes de pasar a la siguiente jugada (criterio utilizado en el campeonato del mundo de fórmula I).

c) Situaciones estado-transformación-estado (Vergnaud, G., 1985), (Colectivo Periódica Pura, 1982).

Se pretende, en primer lugar, determinar el estado final conocidos el inicial y la transformación (caso más sencillo que se resuelve con la suma de números relativos). A continuación se tratarían situaciones en las que hay que determinar el estado inicial, conocidos el estado final y la transformación. En estos casos, se deberá pretender que el alumno encuentre y utilice relaciones del tipo:

estado final - transformación = estado inicial o bien: estado final - estado inicial = transformación

Al igual que se ha indicado en el caso de la suma, se debe llegar aquí a simbolizar la resta como extensión de la sustracción natural ((+3) - (-4) = (+7), donde el signo - representa en cada situación uno de los significados aludidos anteriormente)[7].

3.3.3.2.- Estructura multiplicativa.

Se pueden presentar los siguientes casos:

- *Multiplicación externa* : nº natural x nº relativo = nº relativo

- *Multiplicación "pseudointerna"* : nº relativo x nº relativo = nº relativo

El primer caso no es más que una extensión de la estructura aditiva. Se trata siempre de una composición reiterada: .....veces un número relativo, por lo que, en virtud de su sencillez, y dado que en cierto modo es una ampliación de la multiplicación natural, no nos detendremos más en este punto. Tan solo indicar que algunos de los juegos tratados, como por ejemplo "chirulo", son apropiados para favorecer el aprendizaje de este tipo de multiplicación (si cada caballo contabiliza a razón de cuatro puntos (4), y se han obtenido en una jugada dos caballos por encima de lo normal (+2), el resultado es: 4 x (+2) = +8).

En el segundo caso, hemos de resaltar lo siguiente:

1- los tres números relativos implicados, representan siempre cantidades adjetivadas de distinta naturaleza.

2- las situaciones que se deberán utilizar aquí, como ya se ha indicado anteriormente, son aquéllas en las que los números relativos factores, representan cantidades relativas concatenadas entre sí, como por ejemplo:

caudal (volumen/tiempo) x tiempo = volumen.

Las otras situaciones multiplicativas en las que no se de la característica anterior (Ejemplo: Impulso mecánico = fuerza x tiempo), se deberían abordar en la fase siguiente, como aplicaciones interesantes del número entero como útil matemático. A modo de ejemplo, proponemos trabajar situaciones como las siguientes:

Situación 26.- Un negocio determinado, puede ganar o perder una cantidad fija por día. Si pierde cada día 2.000 ptas., ¿cual era su situación financiera hace tres días, comparada con la actual?.

[7] Simbolizaciones alternativas a la clásica de los paréntesis utilizada aquí son las que pretenden diferenciar los signos de las operaciones de los signos propios de los números relativos, bien colocando estos como superíndices, bien remarcando los de operación o distinguiendo ambos de algún modo. A tal respecto existen varias razones para pensar que dichas formas de expresión pueden plantear serios obstáculos didácticos: por una parte, no se utilizan en el trabajo propiamente matemático, y, por otra, deben ser modificadas en el momento en que se tengan que identificar-relacionar los tipos de signos y unificar la nomenclatura.

Situación 27.- Un depósito, dispone de un grifo de entrada y un desagüe. El caudal de entrada es de 5 litros cada hora y el de desagüe, de 7 litros cada hora. Si únicamente actúa el grifo de entrada y en un instante determinado se anota la cantidad de litros almacenados, ¿cuál era la cantidad hace tres horas?, ¿cuál será la cantidad dentro de dos horas?. Estas y otras cuestiones, se pueden plantear cuando actúen conjunta o separadamente grifo y desagüe.

Otras actividades-situaciones a emplear en esta fase podrían ser: problemas de móviles: ascensores, trenes, etc., en los que intervienen las magnitudes dirigidas velocidad, espacio y tiempo; situaciones relacionadas con la demografía; etc.

Una de las aspiraciones que debería ser colmada al final de la presente fase, sería la de poder resumir los resultados obtenidos en diagramas, tablas, gráficos, etc., como los que se ilustran en las figuras 18 y 19.

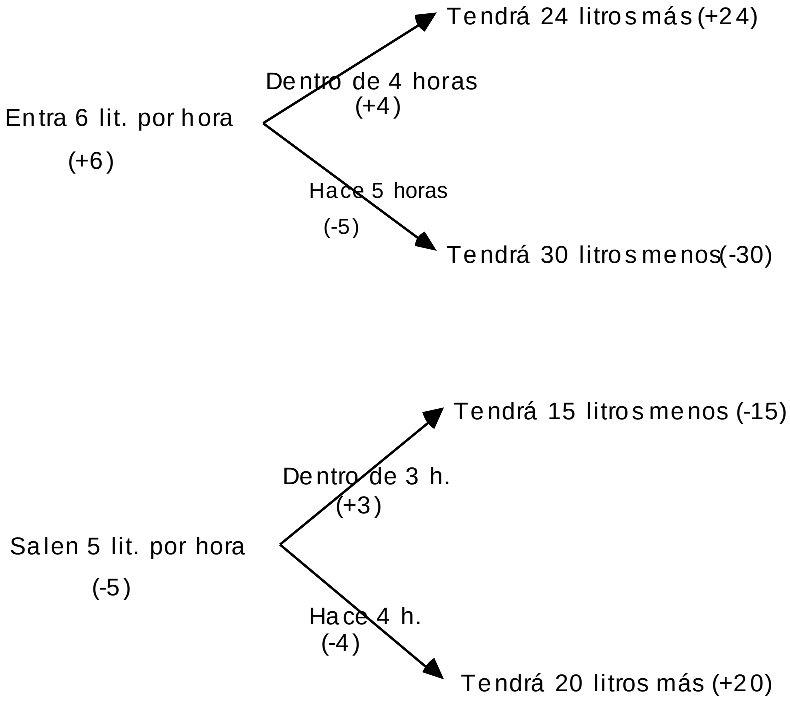


figura 18

	(-5) Salen 5 l. por h.	(+4) Entran 4 l. por h.
Hace 6h. (-6)	30 l. más (+30)	24 l. menos (-24)
Despues de 3 h. (+3)	15 l. menos (-15)	12 l. más (+12)

figura 19

3.4.- DEL NÚMERO RELATIVO AL NÚMERO ENTERO. SEGUNDA DESCONTEXTUALIZACIÓN.

Llegados a este punto del proceso didáctico, el alumno debe disponer ya de una base amplia y variada de experiencias en situaciones relativas. Pero dicho soporte conceptual, está aún incompleto desde el punto de vista matemático. Se han de detectar y explicitar aún, las regularidades que van a permitir la comunicación de los conceptos, la validación formal posterior de los mismos, y su consiguiente institucionalización. En esta fase, se pretende por tanto:

1.- Generalizar resultados particulares, mediante la obtención de las mencionadas regularidades en forma de leyes, reglas y propiedades.

2.- Establecer un "puente" que favorezca el salto de un nivel de abstracción (fase 3) a otro superior (fase 5), con la intención de eliminar el salto o la discontinuidad que supondría la omisión de esta segunda descontextualización.

Para ello, se van a utilizar tres vías distintas pero no excluyentes:

1.- ***completando tablas anteriores***, para obtener y generalizar posteriormente las regularidades constatadas. A partir de situaciones ya conocidas, se trata de:

a.- completar tablas, listas de juegos, etc., construídas en fases anteriores (por la existencia de datos ilegibles, transcripciones incompletas, pérdida de información, etc.) (figura).

b.- trasladar dichos datos, a tablas-modelo en las que se puedan registrar todos los resultados posibles (figura).

c.- completar dichas tablas con objeto de buscar y enunciar verbalmente a continuación, las regularidades existentes.

2.- mediante ***tablas de extrapolación inductiva*** (Freudenthal, 1973), confeccionadas a partir de los resultados de experiencias anteriores.

El proceso inductivo en este caso, se podría iniciar a modo de ejemplo, a partir de la situación ya descrita referente a depósitos. Así, se podría partir de la cuestión: ¿cuál era la cantidad de agua hace tres horas?. Una vez resuelta, se propondrán nuevas cuestiones, donde el número de horas variará en la serie entera:

¿Y hace 4 horas?, ¿Y hace 5 horas?, ...

Se pasaría a registrar simbólicamente las respuestas a estas cuestiones hipotéticas, implicando al grupo-aula en la confección de una tabla de multiplicar con uno de los factores constante (por ejemplo: +5), y el otro recorriendo el conjunto de los números negativos. Del mismo modo, se podría completar después la tabla, recorriendo el segundo factor, el conjunto de los números positivos.

Una vez construida la tabla de multiplicar con +5 como fijo (la cual estaría siempre incompleta por imposibilidad física, si bien con un etcétera, que implícitamente denota que se puede obtener en cualquier momento un determinado producto de factor fijo +5), se podrían proponer las construcciones de las tablas correspondientes a (+6), (+7), (+4), etc., con el fin de institucionalizar una regularidad común a todas ellas. Esto se podrá verificar con nuevas cuestiones, acerca de productos cuyos factores no están ni explícita ni implícitamente en ninguna de las tablas. El proceso se podría repetir con el grifo de desagüe, abarcando así todas las posibilidades de la multiplicación.

Si a las respuestas de los alumnos en el proceso descrito, se contesta con un: ¿estás seguro?, se supone que intentarán justificar las mismas mediante una posible institucionalización que se consolidará con el refrendo del grupo-aula.

Nótese que en este proceso inductivo, el hecho de introducir nuevos datos (factores) hipotéticos, unido al proceso de simbolización, así como al de institucionalización de las reglas, supone un aislamiento del número entero contextualizado, lo que supone un hecho básico para el logro del número entero como útil matemático. Por otra parte, utilizar de esta forma el campo de variabilidad de un factor, constituye una buena herramienta para abordar las ecuaciones lineales, debido a la posibilidad hipotética que se le otorga al segundo factor, que permite un trabajo concreto con el término variable.

3.- a través de ***juegos*** con números relativos aislados, en los que se pongan en funcionamiento las ideas adquiridas tanto en las vias anteriores, como en las fases precedentes. Estos juegos, deben ir encaminados por tanto, a favorecer la toma de conciencia de las propiedades aludidas, al mismo tiempo que se constituyen en pruebas del grado de consecución de los objetivos propios de esta fase.

Se pueden utilizar juegos como los siguientes:

- *cuadrados mágicos* (Bernard, J. E., 1978).

Con este tipo de juegos, se pretende que el alumno aplique las reglas obtenidas tanto a nivel aditivo como multiplicativo. A modo de ejemplo, se propone:

-4		+4
	+1	
		0

Rellenar las casillas en blanco con números enteros, de forma que los totales por filas y columnas, siempre sea cero.

-5		+3
	-3	
		+2

Rellenar las casillas en blanco con números enteros, de forma que los productos por filas y columnas siempre sea -30.

- *juegos de cartas*: Black Jack (Molinoski, M., 1978), "suma cero" y "cero en la mesa", y " las 7 1/2" con referencia cero y números relativos.

- *sopas de números relativos y operaciones*

3.5.- EL NÚMERO ENTERO COMO ÚTIL MATEMÁTICO.

Llegados con éxito hasta este punto, los alumnos disponen de unos instrumentos útiles tanto en la Matemática como en otros campos del saber. No obstante, "el movimiento se demuestra andando", y nada más necesario ahora que comprobar si los nuevos conceptos funcionan en el campo matemático.

Por otra parte, como ya se anunció en las primeras líneas del capítulo, los posibles logros didácticos del proceso descrito no se limitan exclusivamente a la construcción del conjunto de los números enteros, sus operaciones y propiedades, como si lo realmente importante fuese sólo dicha construcción. Antes bien, es justo puntualizar que la mayor potencialidad del tema se centra en torno a la cuantificación relativa en general, al doble sentido y al doble signo así como al orden sin primer elemento, aspectos que son esenciales en la construcción de numerosos contenidos y conceptos matemáticos. Así, del mismo modo que se ha trabajado a partir de situaciones relativas en dominios numerables discretos o discretizables, podríamos haberlo hecho en otros dominios no discretos e incluso no numerables, subsistiendo en todos ellos la misma estructura. Por tanto, el número entero como útil matemático no lo es únicamente por su carácter de número, sino por aportar, además, una estructura ordinal nueva ligada al propio proceso de construcción.

3.6.- EL NÚMERO ENTERO COMO OBJETO MATEMÁTICO

En esta última fase, se entraría en la formulación, sistematización y validación formal de los conceptos que entran en juego. Para ello se utilizarían los métodos e instrumentos propios de la Matemática.

Esta propuesta debería acabar con el análisis didáctico de distintas construcciones formales de los números enteros, lo que queda fuera de los niveles de la Educación Primaria. Remitimos al lector a los capítulos 1 al 6 inclusive de Vargas-Machuca y otros (1991), publicación de la que se ha extraído el presente documento, para una lectura y consulta de los aspectos fundamentales de esta fase del proceso didáctico. El Maestro de Educación Primaria debe conocer dichos aspectos fundamentales para saber lo que han de trabajar y aprender sus alumnos en cursos posteriores.

Referencias

Bell, A. (1986).- Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*; 4(3): pp. 199-208.

Colectivo Periódica Pura (1982).- *Didáctica de los números enteros*. Editorial Nuestra Cultura. Madrid.

Cotter, S. (1969).- Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers. *The Arithmetic Teacher*, v. 16(5), págs. 349-353.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*.

Grupo albuquería (1989).- Aproximación a los números enteros a partir de una escalera. *Suma,* nº 2, pp. 29-33.

Janvier, C. (1985).- Comparison of models aimed at teaching signed integers. En: *9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics*; Jul. 1985; 1/22-6: pp. 135 - 140.

Iriarte y otros (1989).- Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Actas Congreso Enseñanza de las Ciencias*. Santiago de Compostela; pp. 291-292.

Vargas-Machuca y otros (1991).- *Números enteros*. Editorial Síntesis. Madrid.

NOTA: Las referencias anteriores, salvo la última, son las que se incluyen en el capítulo 7 de la última publicación. En la actualidad se pueden encontrar publicaciones más recientes relacionadas con el desarrollo didáctico del tema, como son las que aparecen en el documento de teoría y consulta que se incluye en este mismo capítulo de la asignatura. Nos remitimos a dicho documento y al libro en el que se publica una versión depurada del mismo para completar esta bibliografía.