

5.2.- PROBLEMAS ARITMÉTICOS MULTIPLICATIVOS

- 5.2.1 Definición y Tipos de problemas
- 5.2.2 Problemas no verbales o en contexto
- 5.2.3 Problemas de enunciado verbal
- 5.2.4 Errores y dificultades en la resolución de problemas aritméticos aditivos

PROBLEMA DE ARITMÉTICA

- ❖ situación real o ficticia,
- ❖ que puede tener interés por sí misma,
- ❖ que involucra cierto grado de incertidumbre,
- ❖ cuya clarificación requiere la actividad mental y manifiesta de un sujeto (resolutor),
- ❖ a lo largo de un proceso (resolución) en el que intervienen conocimientos aritméticos,
- ❖ que finaliza cuando aquél encuentra la solución o disminuye la incertidumbre inicial y da por acabada la tarea

(más información en documentos)

TIPOS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS ADITIVOS (PUNTO DE VISTA ESCOLAR)

- **NO VERBALES (EN CONTEXTO)**
(PANV) (Problemas aritméticos no verbales)
- **VERBALES O DE ENUNCIADO VERBAL**
(PAEV) (problemas aritméticos de enunciado verbal)

PROBLEMAS ARITMÉTICOS NO VERBALES (EN CONTEXTO)

- **REALES (AUTÉNTICOS)** Ejemplo?
- **SITUACIONES SIMULADAS** Ejemplo?
(CREADAS «AD HOC»)
- **LÚDICOS** Ejemplo?
(JUEGOS Y PASATIEMPOS)
- **MANIPULATIVOS / CONSTRUCTIVOS** Ejemplo?
(MATERIAL DIDÁCTICO, MANUALIZACIONES)

PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE ENUNCIADO VERBAL (PAEV)

- ***PROBLEMAS ESCOLARES ESTÁNDAR***

(ejercicios en contextos relatados o en forma de historias, requisito: comprensión lingüística, situaciones artificiales (contexto forzado o familiar adaptado para actividad escolar))

- ***PROBLEMAS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA***

(no cumplen alguna de las condiciones habituales de los problemas escolares usuales)

PAEV ESCOLARES ESTÁNDAR

- DEFINICIÓN. EJEMPLOS
- COMPONENTES (Puig, 1988)
 - ESTRUCTURA SINTÁCTICA
 - **ESTRUCTURA DE CANTIDADES Y MEDIDAS**
 - **ESTRUCTURA SEMÁNTICA**
- CLASIFICACIONES DE LOS PAEV MULTIPLICATIVOS

PROBLEMA ESCOLAR DE ARITMÉTICA

- ❖ situación real o ficticia enunciada verbalmente
- ❖ que puede tener interés por sí misma,
- ❖ Con un grado de incertidumbre regulado y adaptado a los contenidos y al nivel de los alumnos
- ❖ cuya clarificación requiere la actividad mental y manifiesta de un sujeto (resolutor)
- ❖ a lo largo de un proceso (resolución) en el que intervienen los conocimientos aritméticos a practicar y aprender
- ❖ que finaliza cuando aquél encuentra la solución o y da por acabada la tarea

Componente Sintáctica

Se puede realizar un análisis sintáctico de un PAAEV escolar examinando cada una de las variables siguientes:

- El tamaño del enunciado.
- La complejidad gramatical.
- La forma en como se presentan los datos: símbolos, palabras, números, dibujos.
- La situación de la pregunta.
- El orden de presentación de los datos.
- Errores en la concordancia de las frases.
- Errores ortográficos.
- Etc.

ESTRUCTURA DE CANTIDADES Y MEDIDAS

- MEDIDA EXTENSIVA
 - (8 caramelos, etc.)
- MEDIDA INTENSIVA
 - (5 libros x estante; 5 bombones x caja)
- CANTIDAD / MEDIDA ESCALAR
 - (5 “veces”)
- *LA COMBINACIÓN DE LOS TRES TIPOS DE CANTIDADES / MEDIDAS Y LAS DOS OPERACIONES (MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN) CUBREN EL CAMPO DE PROBLEMAS*

Componente Semántica

Según los significados de las operaciones un PAEV multiplicativo de una sólo operación o etapa puede ser de:

- **PROPORCIONALIDAD SIMPLE O ISOMORFISMO DE MEDIDAS**
- **COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA**
- **PRODUCTO CARTESIANO**

Cuando hay más de una operación o etapa (problemas de varias etapas) se han de combinar las categorías anteriores

PROPORCIONALIDAD SIMPLE o Isomorfismo de medidas

- Interviene una proporción o relación multiplicativa entre dos espacios de medidas distintos.

“Luisa tiene 5 cajas de naranjas, con 12 naranjas en cada caja. ¿ Cuántas naranjas tiene Luisa?”

Dos espacios de medida: N° de cajas: 5 / N° de naranjas: desconocida.

Una relación multiplicativa, regla de correspondencia, proporción o isomorfismo: 12 naranjas en cada caja

Las dos medidas suelen ser extensivas y la regla de correspondencia o isomorfismo una cantidad intensiva

PROPORCIONALIDAD SIMPLE o Isomorfismo de medidas

“ Juan ha comprado 6 cuadernos. Si ha pagado 12 euros en total. ¿ Cuánto cuesta cada cuaderno?”

“ Luisa quiere repartir 25 caramelos entre sus amigos. Si a cada uno les da 5 caramelos, ¿ Para cuántos amigos tendrá?”

“ Si compro 6 libros y cada uno me cuesta 16 euros, ¿ Cuánto dinero me gasto?”

-----	-----	-----
Espacio de Medida 1º	Regla de correspondencia	Espacio de medida 2º
-----	-----	-----
5 cajas	12 naranjas por caja	¿? Naranjas totales
6 cuadernos	¿? Precio de cada cuaderno	12 euros
¿? Amigos	5 caramelos por cada amigo	25 caramelos
6 libros	12 euros cada libro	¿? Dinero

PROPORCIONALIDAD SIMPLE o Isomorfismo de medidas

tres tipos de problemas:

	Espacio Medida 1°	Regla de correspondencia	Espacio de medida 2°
IM 1	conocido	conocido	desconocido
IM 2	conocido	desconocido	conocido
IM 3	desconocido	conocido	conocido

Las estructuras de cantidades de estos problemas serán por tanto:

$$\text{IM 1: } E \times I = E$$

$$\text{IM 2: } E / E = I$$

$$\text{IM 3: } E / I = E$$

MULTIPLICACIÓN

DIVISIÓN PARTITIVA

DIVISIÓN CUOTITIVA

Algunos problemas

2. División entera o inexacta

Marcos trabaja en una biblioteca y tiene que colocar 1.130 libros en estantes. En cada estante pone 25 libros.

¿Cuántos estantes utiliza? ¿Cuántos libros le quedan?



$$\begin{array}{r} 1.130 \quad | \quad 25 \\ \underline{130} \quad 45 \\ \text{Resto} \quad 5 \end{array}$$

Dividendo

Divisor

Cociente

Marcos utiliza 45 estantes y le quedan 5 libros.

La división entera o inexacta tiene el resto distinto de cero.

Juan tiene un puesto de periódicos.
Esta mañana ha pagado 2.375 pesetas
por un paquete de 25 revistas iguales.

¿Cuál es el precio de una revista?



$$25 \times \square = 2.375$$

El factor desconocido es el cociente
de esta división:

$$\begin{array}{r} 2.375 \quad | \quad 25 \\ 125 \quad 95 \\ 0 \end{array}$$

El precio de una revista es de
95 pesetas.

La división exacta es la operación que permite encontrar el factor desconocido de una multiplicación de dos factores.

2 Observa los precios y calcula en tu cuaderno.



- Rubén pagó 900 pesetas por un lote de cuadernos. ¿Cuántos cuadernos compró?
- Marta pagó 476 pesetas por un lote de postales. ¿Cuántas postales compró?
- Luis pagó 228 pesetas por un lote de lapiceros. ¿Cuántos lapiceros compró?
- Eva pagó 1.824 pesetas por un lote de bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos compró?

COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

- Son problemas multiplicativos con una estructura similar a los isomorfismos de medida; existe una comparación multiplicativa entre dos espacios de medidas, pero a diferencia de la categoría anterior, ambos espacios de medidas están definidos a partir de la misma magnitud, y como consecuencia de ello la comparación está definida mediante un escalar.

Como en la categoría anterior existen tres posibilidades dependiendo de la situación de la cantidad incógnita:

	Espacio Medida 1°	Regla de correspondencia	Espacio de medida 2°
CM 1	conocido	conocido	desconocido
CM 2	conocido	desconocido	conocido
CM 3	desconocido	conocido	conocido

La dificultad que pueden tener estos problemas a la hora de diferenciar los papeles de los dos espacios de medidas, como en el caso de los problemas comparativos aditivos, se resolverá mediante un análisis de la proposición donde se encuentra la partícula comparativa.

La estructura de cantidades de estos problemas es:

CM 1 : $E \times E_s = E$

CM 2 : $E/E = E_s$

CM 3 : $E/E_s = E$

Ejemplos de estas categorías de problemas son los siguientes:

- *“Luisa tiene 8 euros. Felipe tiene 3 veces los euros de Luisa. ¿Cuántos euros tiene Felipe?” (multiplicación)*
- *“María tiene 12 bombones, si Andrés tiene 2 bombones, ¿Cuántas veces tiene María los bombones que tiene Andrés?” (división partitiva)*
- *“Andrés tiene 6 bombones que es el triple de los que tiene María ¿Cuántos bombones tiene María?” (división cuotitiva)*

PRODUCTO CARTESIANO O PRODUCTO DE MEDIDAS

- A estos problemas también se les denomina problemas de producto cartesiano, y se caracterizan por la existencia de un producto cartesiano entre dos espacios de medidas M_1 y M_2 , en un tercer espacio de medida M_3
- Los problemas en los que aparecen áreas, volúmenes y otros conceptos físicos son de esta categoría. También los problemas multiplicativos llamados combinatorios pertenecen a esta categoría.

Producto de medidas

Ejemplos:

“Luisa tiene 5 pantalones y dos blusas. ¿De cuantas formas distintas se puede vestir Luisa?”

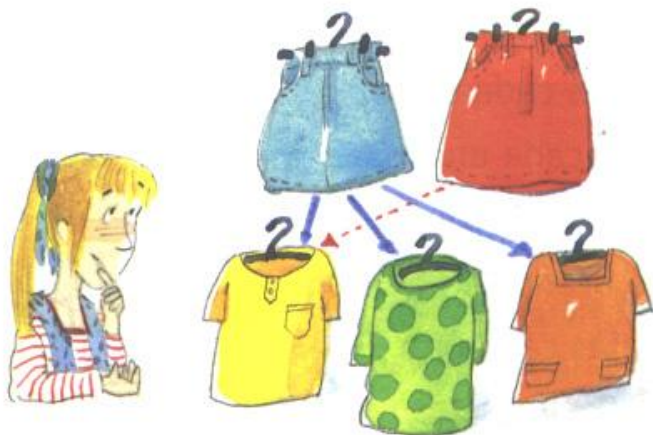
	M_1	M_2	M_3
PM 1	Conocido	Conocido	Desconocido
PM 2	Conocido	Desconocido	Conocido

La estructura de cantidades de estos problemas es la siguiente:

$$\text{PM 1: } E \times E = E$$

$$\text{PM 2 : } E / E = E$$

1 Calcula de cuántas formas puede elegir Marta.



- Marta quiere comprar una falda y una camiseta. ¿De cuántas formas puede elegir la falda y la camiseta?

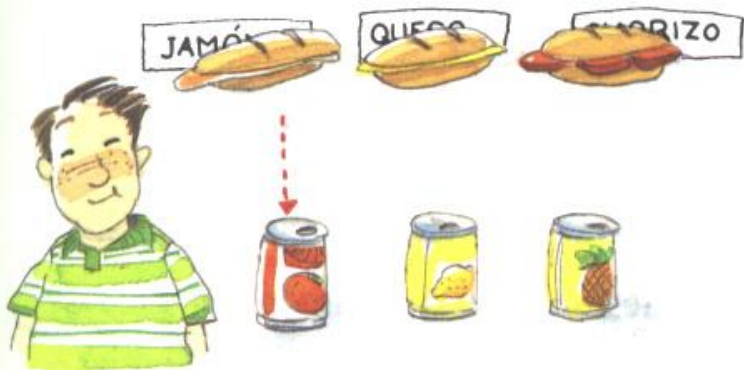
Falda azul y camiseta amarilla ... y ...

Falda azul y y ...

... y y ...

Puede elegir de ... formas.

2 Calcula de cuántas formas puede elegir Carlos.



- Carlos quiere tomar un bocadillo y un refresco. ¿De cuántas formas puede elegir el bocadillo y el refresco?

... y y y ...


... y y y ...

... y y y ...

Puede elegir de ... formas.

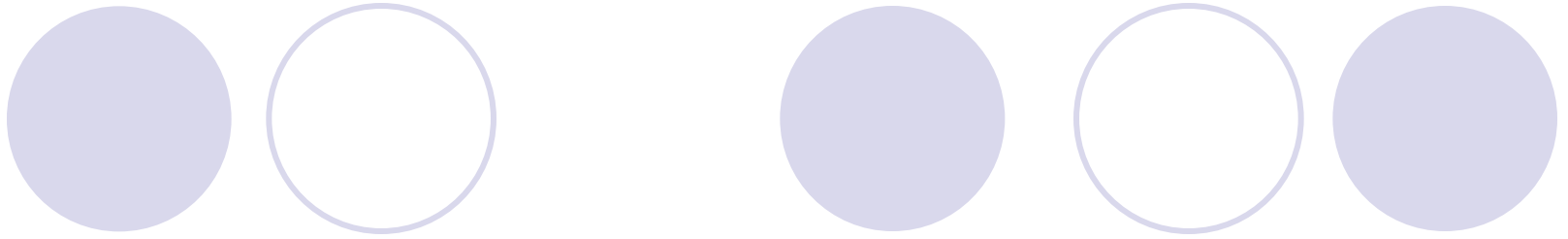
Analiza cada uno de los siguientes problemas multiplicativos: (en cuestionarios o presentaciones)

- **1. En una fiesta de cumpleaños se repartieron 72 caramelos. A cada niña le tocaron 8 caramelos. ¿ Cuántas niñas había en la fiesta?**
- **2. Pedro tiene 14 años. Su abuelo es 5 veces mayor que él. ¿ Qué edad tiene su abuelo?**
- **3. Una pastilla de chocolate tiene 12 porciones. Hay 3 porciones en cada fila. ¿ Cuántas filas tiene?**
- **4. Para ir de mi casa a la escuela hay tres caminos distintos y para ir de la escuela a los futbolines hay 4 caminos distintos. ¿ De cuántas maneras puedo ir desde mi casa a los futbolines, pasando por la escuela?**

- 
- **5. Carolina da una fiesta de cumpleaños a la que van 8 niñas. Su mamá ha comprado una bolsa con 72 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tocan a cada niña?**
 - **6. Tengo que plantar 32 árboles en mi finca, y quiero hacerlo en 8 filas paralelas ¿Cuántos árboles plantaré en cada fila?**
 - **7. Juan tiene 36 años, 4 veces los años de Felipe ¿Cuántos años tiene Felipe?**

2. Inventa un problema multiplicativo que tenga la siguiente estructura semántica:

- **1. Isomorfismo de medida 2.**
- **2. Comparación multiplicativa 1.**
- **3. Isomorfismo de medida 3.**
- **4. Producto de medida 2**



Algunos problemas combinados.

- Juan ha comprado 3 botellas de agua a 35 céntimos cada una, 2 bocadillos a 70 céntimos da uno y 2 bombones a 80 céntimos cada uno. Si pagó con 5 euros, ¿cuánto le devolvieron?
- Andrés ha pagado su nueva televisión de plasma de la siguiente forma: 235 euros al contado y 6 plazos de 60 euros cada uno ¿Cuál es el precio de su televisión ?

PROBLEMA 2

Luis ha ido de excursión. En el viaje se ha gastado 1.490 pesetas, en la comida 1.110 pesetas y en refrescos 480 pesetas. Con el dinero que le sobró compró una tarta por 1.190 pesetas.

¿Cuánto dinero gastó Luis en total?

Solución anticipada: ...

Solución exacta: ...

PROBLEMA 3

Alberto ha ido de compras con 10.000 pesetas. Ha comprado una novela por 1.960 pesetas, un atlas por 4.025 pesetas y un diccionario. Al final le sobraron 296 pesetas.

¿Cuánto le costó el diccionario?

Solución anticipada: ...

Solución exacta: ...

PROBLEMA 4

Rubén compró un disco por 3.890 pesetas, una cinta de vídeo por 1.586 pesetas y una revista por 410 pesetas.

Rubén ha pagado las tres cosas con el dinero que le ha regalado su abuelo y todavía le sobran 975 pesetas.

¿Cuánto dinero le regaló su abuelo?

Solución anticipada: ...

Solución exacta: ...

PROBLEMA 5

Los árboles frutales de una finca son: 580 naranjos, 205 manzanos y 390 perales. En una helada se secan 97 de estos frutales.

¿Cuántos frutales quedan en la finca?

Solución anticipada: ...

Solución exacta: ...

1 Antes de resolver los siguientes problemas escribe una solución aproximada que te parezca razonable.

PROBLEMA 1

Ana compra, con el dinero que tenía, una cometa por 965 pesetas, un juguete por 1.468 pesetas y un helado por 125 pesetas. Después de pagar le sobran todavía 3.458 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía Ana?



Una solución razonable aproximada se puede anticipar haciendo una estimación del dinero que tenía Ana. Para ello, se redondean los datos a la centena más próxima y se suman las cantidades resultantes.

Solución anticipada:

$$1.000 + 1.500 + 100 + 3.500 = 6.100$$

Solución exacta:

$$965 + 1.468 + 125 + 3.458 = 6.016$$

Creencias incorrectas usuales de los alumnos de Primaria sobre los problemas rutinarios escolares de aritmética

- Todo problema tiene una solución
- Hay una única y precisa solución numérica para cada problema
- La solución se obtiene aplicando una o varias operaciones aritméticas encadenadas
- Todos los números que figuran en el enunciado deben ser empleados en los cálculos

PROBLEMAS ARITMÉTICOS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA MULTIPLICATIVOS

- DEFINICIÓN Y EJEMPLOS
- ALGUNAS CARÁCTERÍSTICAS
- UTILIDAD E IMPORTANCIA
- TIPOS Y EJEMPLOS

PROBLEMAS ARITMÉTICOS NO RUTINARIOS O DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: definición

- **Problemas auténticos y verosímiles sobre situaciones reales o realistas en las que se destaca el uso funcional del conocimiento matemático**
- **Se mezcla la misma cantidad de agua a 40° y a 60° . ¿cuál será la temperatura que alcanza la mezcla?**
- **Pizzas de dos tamaños y precios**
- **Divisiones inexactas (problema del n° de autobuses necesarios)**
- **Problemas de cambio de moneda**
- **Interpretar una factura, un precio o un cambio de tarifa o un presupuesto**

Algunas características

- **SITUACIÓN : EVENTOS CONOCIDOS, CON SENTIDO REAL**
- **PREGUNTA O INTERROGANTE FINAL: LÓGICA Y COHERENTE**
- **INFORMACIÓN / DATOS: REPRESENTATIVOS Y CREÍBLES, INSUFICIENTES, SOBREABUNDANTES, INNECESARIOS, . . .**
- **ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN: MÚLTIPLES, DE PENSAR**
- **SOLUCIÓN: MÚLTIPLES POSIBILIDADES, INCLUIDA LA AUSENCIA DE SOLUCIÓN**
- **RESPUESTAS DEL SUJETO: REALISTAS, NO RUTINARIAS**
- **CAPACIDADES Y DESTREZAS: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN, DE LA SOLUCIÓN, MATEMÁTICAS Y REALIDAD, ETC.**

Utilidad formativa



- Favorecer la reflexión y los procesos complejos de pensamiento en situaciones verosímiles cercanas a la experiencia
- utilidad vida cotidiana
- necesidades de comunicación (interpretación e intercambio)
- cuestionamiento crítico / ciudadanía activa (“**más difícil de engañar**”)
- comprender la utilidad profunda de las matemáticas(GPS, modelos económicos, etc.)
- . . .

Algunos tipos de problemas no rutinarios o de modelización matemática

● **modelización matemática elemental**

Tareas simples para principiantes:

- Problemas que omiten información relevante
- Problemas con soluciones múltiples
- Problemas sin solución
- Problemas cuya solución no requiere cálculos
- Problemas que incluyen datos irrelevantes o información superflua

Algunos tipos de problemas no rutinarios o de modelización matemática

- **modelización matemática moderada o intermedia**

- interpretación (interpretar un resultado o un grafico)
- validación (revisar y validar críticamente un resultado)
- modelización elemental

- **modelización matemática avanzada**

Errores y dificultades en los problemas multiplicativos

Estudio de las proposiciones abiertas subyacentes
(esquema de la estructura del problema)

Estudio de las dificultades sintácticas

Estudio de las dificultades semánticas

Estudios de las proposiciones abiertas subyacentes

$a \times b = ?$	$? = a \times b$
$a \times ? = c$	$c = a \times ?$
$? \times b = c$	$c = ? \times b$
$a : b = ?$	$? = a : b$
$a : ? = c$	$c = a : ?$
$? : b = c$	$c = ? : b$

Dificultades sintácticas

- 1.- Cuando los problemas verbales se presentan por medio de **grabados, dibujos o materiales concretos**, resultan más sencillos, al menos en los primeros niveles.
- 2.- La **longitud del enunciado**, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta son variables, así como otras de la estructura superficial del problema son fuentes de dificultad añadidas al problema.
- 3.- El **tamaño de los números** y la presencia de símbolos incrementan la dificultad del problema.
- 4.- La relación entre **el orden de aparición** de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos las operaciones para resolver el problema es también una fuente de dificultad.