LÓGICA DEL PENSAMIENTO ARITMÉTICO EN ESCOLARES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Alfonso Ortiz Comas
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales
Universidad de Málaga

En este artículo presentamos los resultados obtenidos por escolares de Educación Primaria (6-12 años de edad) que fueron sometidos a dos pruebas distintas. La primera consistió en la realización de un test en razonamiento inductivo numérico finito. Esta prueba la realizaron 400 escolares. En base a los resultados obtenidos se seleccionaron 28 alumnos para realizar una segunda prueba consistente en unas entrevistas clínicas individualizadas con el fin de determinar la evolución de las relaciones lógicas que estos escolares pueden establecer en el campo de los números naturales finitos**. El origen de estas investigaciones está en problemas históricos sobre los fundamentos lógicos de la aritmética. Entre las cuestiones a las cuales queremos dar respuesta empírica nos encontramos con una fundamental: determinar hasta que punto la lógica juega un papel determinante en el origen de la aritmética o por el contrario, si los orígenes de la lógica están predeterminados por la aritmética y otros conocimientos.**

Introducción

Si como profesores reflexionamos sobre el proceso de enseñanza de las matemáticas al que son sometidos los escolares desde Educación Infantil hasta terminar el Bachillerato (3-18 años), en los inicios (3-6 años) estamos más pendiente de lo que puede aprender el niño, potenciar habilidades y capacidades matemáticas y existe cierta mirada a los orígenes del conocimiento para decidir por donde empezar. Este origen puede que predetermine el ulterior desarrollo de los conocimientos matemática en el niño. Si nos vamos a los niveles superiores (14-18 años), estamos pendiente de una base sólida para el futuro de los alumnos en estudios superiores. Un mirar atrás y un mirar adelante: en el primero pendiente de los orígenes de las primeras nociones aritméticas en el niño, en el segundo del edificio matemático.

Para investigar los orígenes del conocimiento matemático hemos estudiado los fundamentos de la matemática y su desarrollo histórico. Al adentrarnos en ellos se nos plantea el papel de la lógica en el proceso de aprendizaje y construcción de los conceptos básicos de la aritmética y la geometría en la escuela.

La relación entre lógica y matemática ha sido, es y será, una de las cuestiones centrales en epistemología de la matemática. Es incuestionable que existen unos fundamentos lógicos de la matemática, pero no significa que la lógica esté presente en el origen de la aritmética o la geometría.

Si observamos unos objetos dispuestos al azar, nuestra mente intenta darles orden y significado, entonces aplicamos el sentido común y elementos lógicos, entre otros, para organizarlos y pensar sobre ellos. Pensar sobre algo no es hacer lógica. Lo que determina el campo de una ciencia es ese contenido sobre el que pensamos y no las herramientas mentales (esquemas) que utilizamos para desarrollar los pensamientos necesarios. Esta cuestión no es ajena a la enseñanza de las matemáticas. Al escolar le presentamos objetos matemáticos sobre los que debe pensar con la intención de conseguir un sentido y un significado personal que le de la posibilidad de comprender para aprender. En este proceso el alumno debe establecer relaciones lógicas con contenido matemático o, si me apuran, en un contenido matemático. Es lo que hemos denominado *lógica del pensamiento matemático.* La lógica del pensamiento matemático es el conjunto de relaciones, conceptos y reglas de inferencia que establecemos y utilizamos para razonar en contenidos matemáticos, así como sus representaciones. En estos casos, para un buen razonar, es tan importante el dominio del contenido como los esquemas lógicos que se aplican.

Bajo el supuesto de que tanto la matemática como la lógica son constructos que se producen en el individuo en procesos de aprendizaje y que las ciencias correspondientes a ambas son una de sus manifestaciones, podemos afirmar que los orígenes de la matemática en el sujeto están más en relación con los objetos, y por tanto, la matemática es más empírica que la lógica. En la construcción individual de la matemática, la construcción de la aritmética se desarrolla en una etapa que se inicia en contacto con los objetos: conservación de la cantidad discreta y continua, comparación de cantidades, iniciación a la medida, establecimiento de correspondencias entre conjuntos, etc. Con independencia de representaciones lingüísticas o el uso de signos y símbolos.

Por otra parte, la lógica se inicia a nivel verbal con conceptos tales como el de proposición. El contexto aludido en una proposición puede estar en la aritmética o no, pero necesariamente en el sujeto, esto último de vital importancia. Toda proposición encierra conceptos que el individuo debe dominar al hacer uso de la misma.

Las reglas de la lógica son el resultado de abstracciones a partir de relaciones que hemos establecido previamente. Para explicar el significado de una regla lógica a un escolar necesitamos ejemplos concretos en los que el escolar ya había aplicado dicha regla consciente o inconscientemente. Si le presentamos el 2 y el l6, el escolar puede establecer la relación *ambos son pares*. El concepto *par* ha sido construido previamente en su consciencia, pero resulta que el concepto *par* es la relación misma. Estas construcciones previas son las que posibilitan en el escolar una construcción efectiva de su pensamiento matemático. Por otra parte, las construcciones previas abundan en contextos no matemáticos y por ello, fuera del campo de la matemática se construye la lógica del pensamiento humano. Así, al actuar sobre los objetos, el niño adquiere la relación *mayor que*, que da sentido y significado al concepto tamaño y actuando sobre el tamaño de los objetos puede establecer relaciones lógicas ordinales, como *ser mayor, ser menor, ser igual, estar entre,* etc. Sin estas relaciones difícilmente el niño podrá adquirir el concepto tamaño y, difícilmente entenderá una proposición que contenga alguna de estas relaciones.

Centrándonos en el pensamiento aritmético, los niños actúan sobre los números estableciendo relaciones entre los mismos. Algunas de estas relaciones coinciden en extensión aunque tengan distinto significado: *Ir después, ser mayor, posterior; consecutivos, uno más y siguiente;* etc. Algunas de estas relaciones son importadas de contextos no aritméticos con significados ajenos a la aritmética. Contextos con la misma estructura lógica pero no con la misma estructura aritmética. Así, el caso de *uno más* y *siguiente. Siguiente* no tiene un significado aritmético ya que se define como el que le sigue o el que viene a continuación, sin el uso de un concepto aritmético aunque lo apliquemos en el número natural, incluso en los axiomas de Peano. Aunque podamos hacer un uso indistinto de *siguiente* y *uno más* en el campo de los números naturales, en la estructura aritmética tienen distinto nivel de significación. *Uno más* es un nivel aditivo (uso de la suma para establecer o expresar la relación) y *siguiente* puede ser un nivel de conteo o de imaginar la recta numérica. El nivel de conteo es el de memorización verbal de una secuencia o de una parte de la misma: en el abecedario, la letra siguiente a *b*, es *c*. El abecedario posee estructura lógica pero no estructura aritmética que posibilite la suma.

Los *niveles de significación* representan formas estables del *pensamiento matemático* del sujeto. Estas formas evolucionan con la edad y con los aprendizajes en matemáticas. En el ejemplo anterior podemos distinguir dos niveles: Uno meramente ordinal y otro propio de la aritmética elemental. La herramienta utilizada en el segundo caso es la suma. La suma es adquirida por el escolar en un proceso de enseñanza aprendizaje de la aritmética después de una construcción efectiva del número natural y por tanto, es propio de esta última y no de la lógica. Un buen uso de la suma al establecer relaciones en el campo numérico es debido a un buen dominio del conocimiento aritmético. Un objetivo básico de la enseñanza de la matemática es que el escolar establezca relaciones lógicas sobre contenidos matemáticos con significado propio de la matemática. Que desarrolle su *pensamiento matemático* y lo aplique en distintos contextos, dentro y fuera de la matemática.

El significado aritmético de *siguiente* tiene en el niño un origen anterior a la secuencia numérica al trabajar con cantidades considerándolas como magnitudes (cantidades discontinuas o discreta) para interpretar el concepto de unidad y de uno más. Pero este proceso en el caso de *siguiente* no acaba en la interpretación aditiva anteriormente expuesta y debe evolucionar a niveles superiores.

El *pensamiento matemático* debe evolucionar en el escolar desde niveles de significación aritméticos hasta conseguir el establecimiento de *relaciones de relaciones*. Si N es el conjunto de los números naturales, formalmente las *relaciones de relaciones* se establecen en el producto cartesiano NxN, lo que potencia en el escolar establecer relaciones de equivalencia para asimilar conceptos tales como los números enteros o los números racionales. Las *relaciones de relaciones* permiten concluir que la relación existente entre dos números es la misma que existe entre otros dos. Las *relaciones de relaciones* posibilitan el encadenamiento de relaciones para obtener las distintas clases de equivalencia o una regularidad numérica como puede ser una serie. Las relaciones de relaciones posibilitan tener en cuenta más de un factor simultáneamente. El niño puede identificar de entre varias relaciones las que son equivalentes. El número de relaciones de orden y de equivalencia que podemos establecer en el conjunto de los números naturales es infinito. Es un universo de relaciones en el que podemos, a su vez, establecer una infinidad de relaciones.

El *ser consecutivos* en una misma secuencia o serie numérica es un concepto debido al establecimiento de una *relación de relaciones*. Así, el niño que es capaz de construir una serie de diferencia tres, si no establece la relación de relaciones puede pensar que las parejas de números consecutivos (4,7) y (23,26) pertenecen a la misma serie aritmética de diferencia tres. No tiene en cuenta que a un mismo criterio o regla, le pueden corresponder varias series asociadas. Distinguir si dos parejas de números consecutivo, según un criterio, pertenecen a una misma serie asociada es una nueva relación. El ejemplo expuesto explica el significado de lo que entendemos por relación de relaciones en una aritmética no formal que forma parte del pensamiento aritmético del sujeto.

El *pensamiento proporcional* es un tema clásico en la aritmética elemental y ocupa un lugar privilegiado en el establecimiento de relaciones de relaciones. La igualdad de dos razones es un caso de silogismo numérico en el que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Para llegar a la proporción no es suficiente con un pensamiento multiplicativo en el sentido de determinar la relación multiplicativa entre dos cantidades dadas (doble-mitad, triple-tercio, etc.). Debemos llegar a la igualdad de dos o más razones para interpretar situaciones de proporcionalidad como un reparto

proporcional o la semejanza de dos o más polígonos. El escolar que interpreta la igualdad de dos razones mediante cocientes iguales no ha llegado al nivel del pensamiento proporcional. Estos alumnos simplifican un sumando como factor en una fracción o no tienen en cuenta el doble producto al calcular el cuadrado de un binomio. En este último caso aplican un pensamiento lineal mediante una correspondencia asociada a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, nivel del pensamiento multiplicativo y no de un nivel de pensamiento proporcional.
En paralelo al pensamiento proporcional el escolar debe desarrollar el *pensamiento relativo*. El pensamiento relativo es a la suma como el pensamiento proporcional es a la multiplicación. En el pensamiento relativo lo importante es la diferencia entre dos cantidades con independencia de su tamaño. Un ejemplo real y sencillo ocurre en el fútbol, donde en una eliminatoria a dos partidos lo que determina el triunfo es la diferencia de goles a favor y en contra, no cuantos goles a favor y cuantos goles en contra. Estas diferencias de goles se tienen en cuenta en las clasificaciones previas a una competición en caso de empates a puntos. Así, si en un partido he ganado por dos goles y en otro pierdo por tres, tengo una desventaja de un gol. Pero si en el siguiente gano por dos tengo una renta positiva de un gol. En muchas ocasiones para que un equipo se clasifique para una fase posterior debe ganar un último partido de la fase previa por más de una cantidad de goles. Estas relaciones constituyen parte del pensamiento relativo. El pensamiento relativo es el que posibilita la comprensión y construcción efectiva de los números enteros, al igual que el pensamiento proporcional posibilita la comprensión y construcción efectiva de los números racionales.
Tanto el pensamiento relativo como el pensamiento proporcional son precursores del pensamiento algebraico. En el currículum escolar se le da poca importancia al pensamiento relativo lo que lleva a serias dificultades en la interpretación del signo menos en el “algebra de los paréntesis”. El signo menos delante de un paréntesis se puede interpretar como restar todo su contenido, el opuesto del mismo o, como multiplicar su contenido por “menos uno” (-1) cambiando el signo a todos sus términos (propiedad distributiva). Pero -1 es un número negativo y se debe tener en cuenta la regla de los signos para el producto. Resulta que las tres interpretaciones anteriores son necesarias para el paso de la aritmética al álgebra. En situaciones propias de la aritmética, solo con expresiones numéricas, podemos utilizar indistintamente las tres acepciones anteriores. Pero en desarrollos algebraicos donde se combinan los signos de la aritmética con números y letras la cuestión no es así, ya que muchas de las operaciones no se pueden realizar, solo reagrupar o simplificar términos semejantes. En álgebra el resultado puede ser una expresión más o menos compleja lo cual no ocurre en el campo exclusivo de los números. En el campo numérico todo resultado es un número. La realización de una tarea algebraica como simplificar una expresión compleja, no es al azar y los pasos a seguir dependen de las expresiones presentes que aconsejan aplicar una u otra interpretación del signo menos o, incluso, ninguna de ellas para que en sucesivos pasos poder simplificar términos semejantes. Todos estos procesos distan mucho del *"álgebra de la lógica formal"* . Lo que orienta el proceso no son solo las reglas de la lógica que se puedan utilizar sino, además, los distintos signos matemáticos de las distintas operaciones con sus posibles significados. Con ello creo que aporto nuevas razones para no confundir el razonamiento lógico con el razonamiento matemático.

He pretendido explicar que el sustento del razonamiento matemático es su contenido y que su álgebra está impuesta por el funcionamiento del contenido. En matemáticas el álgebra se considera como una generalización de la aritmética y la geometría. A diferencia de la lógica (y por tanto de su álgebra) que se construye con independencia de cualquier contenido. En lógica predomina el significado estructural con independencia del sentido y del significado en un contexto. En matemáticas no se puede dar un sentido sin una referencia y un significado previos, ya que el pensamiento sobre algo no puede ser su referencia. El pensamiento no puede ser la referencia de un enunciado pero si podemos considerarlo como su sentido. *Las leyes lógicas son ante todo leyes en el dominio de las referencias y que solo indirectamente se relacionan con el sentido (Frege, 1984, pp. 93).* Según Frege (1984), al referirnos a las leyes de la lógica, la palabra ley tiene un doble sentido: en un sentido afirma lo que es, en otro prescribe lo que debe ser. Solo en este último sentido las leyes lógicas pueden ser llamadas leyes del pensamiento, al fijar el modo como hay que pensar. Esto último está en relación con la psicología.

Antecedentes y orígenes del problema: Contexto y conflicto epistemológicos

Los antecedentes del problema planteado entre lógica y matemáticas nos han llevado a considerar el término *pensamiento matemático*. Pretendemos con ello evitar controversias en didáctica de la matemática planteadas en el seno de la propia matemática.

En principio debemos distinguir entre *lógica formal* y *lógica deductiva*. La lógica formal tuvo sus inicios en Leibniz (1646-1716) que se planteaba la posibilidad de poder expresar nuestras ideas de forma clara con un sistema de signos como sucede con los números en aritmética. La lógica formal es prolongación de la clásica lógica aristotélica. Por otra parte, la lógica deductiva tiene sus orígenes en la axiomatización de la geometría realizada por Euclídes: Inferir todo un campo de la matemática a partir de unos postulados.

Para Boudot (1978), la lógica formal determina las reglas canónicas a las cuales se somete la demostración válida. La lógica formal analiza las estructuras de las ciencias demostrativas, describe, censa y eventualmente valida los procedimientos que ellas emplean. Explicita y define los conceptos cardinales sobre los que descansa el pensamiento demostrativo.

A principios del siglo XIX, Peacock afirma que el álgebra es una ciencia deductiva al igual que la geometría. Todos los procesos del álgebra habrán de estar basados en el establecimiento completo del cuerpo de leyes que conciernen a las operaciones utilizadas en esos procesos, no pudiéndose usar ninguna propiedad de una operación si no ha sido puesto de manifiesto que tal propiedad pertenece a esa operación o no ha sido obtenida por deducción a partir de las leyes iniciales (Nidditch, 1978). Un ejemplo del desarrollo del álgebra abstracta en el sentido de Peacock fue la *Teoría de Grupos* de Galois y de Abel. Fueron los comienzos de las estructuras algebraicas

En matemáticas se considera el álgebra como una generalización de la aritmética y adelanta el principio de permanencia de las propiedades de las operaciones algebraicas. Según este principio cualquier ampliación o generalización de la aritmética del número natural debe incluir las operaciones y propiedades de los números naturales. Por ello todas las extensiones del campo numérico deben poseer las operaciones de los números naturales y sus propiedades o cuerpo de leyes que conciernen a las operaciones. Postulados inquebrantables del álgebra.

El problema de la lógica y la matemática se remonta a mediados del siglo XIX con los modelos de Boole, De Morgan y Jevons, aunque podamos tener antecedentes anteriores. Una de las pretensiones de los lógicos de la época era demostrar que el origen y los fundamentos de la aritmética, y por tanto del número natural, estaban en la

lógica de clases y de predicados. Ello llevó a algunos lógicos al intento de considerar la matemática como parte de la lógica. Russell en sus principias intenta demostrar la reducción de la aritmética a unos axiomas lógicos (Su imposibilidad fue demostrada por Gödel en 1935).
Esta corriente lógica o logicista de la aritmética no fue la única, ya que muchos lógicos como Mill (1892), consideran que el origen de la aritmética es inductivo. Los libros de aritmética de la época están impregnado de este enfoque que he denominado "aritmetismo" (Ortiz 1998). Teniendo por tanto dos corrientes lógicas: la logicista y la inductivista.
La corriente inductivista de Mill, que dio lugar al aritmetismo, la podemos caracterizar por las siguientes afirmaciones:

1. El origen del número natural es inductivo.
2. La aritmética no es un sistema deductivo sino inductivo.
3. Los números se dicen de las cosas y no de los conceptos (según Frege los números no se dicen de las cosas, sino de las clases).
4. El punto de partida de la aritmética son lo axiomas sobre cantidades, basado en el principio empirista: "el todo es la suma de las partes". (en contradicción con los principios racionalistas de la Gestald)

Las interpretaciones epistemológicas inductivistas tienen un desarrollo matemático concreto. Al hablar de "aritmetísmo" nos referimos a esta manera particular de desarrollar la aritmética por los matemáticos de la época y que dieron lugar a las síntesis inductivistas sobre el origen y naturaleza de la aritmética del número natural.

La respuesta dada por los matemáticos al problema planteado por los lógicos en la corriente logicista a los fundamento de la matemática fue la teoría de conjuntos y la axiomatización de las construcciones matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX y principios del siglo XX. Las construcciones conjuntistas de la aritmética del número natural parten del concepto de cardinal de un conjunto, pero también existen construcciones axiomáticas puramente ordinales cuyo soporte es el orden y la secuencia numérica (Fernández y Ortiz 2008) que en parte están en relación con el aritmetísmo.

El fracaso de los planteamientos conjuntistas en la enseñaza elemental de la matemática fue su formalismo en cuanto al método. Utiliza el método deductivo ya que se inicia con la idea general de conjunto para pasar a conceptos particulares, mientras el pensamiento del escolar es inductivo, de particulares a generales (Ortiz, 1997).

Aclarar que la diferencia entre *lógica formal* y *lógica matemática* es que la segunda utiliza el método matemático de formalización para resolver los problemas de la lógica y abandona aspectos generales de la lógica aristotélica y por ello es más restringida (Andréiev, 1984).

Poincaré (1964), distingue entre matemáticos lógicos o analistas y matemáticos intuicionista o geómetras. Aunque hayan estudiado juntos pueden llegar a una tendencia u otra y no es la materia que tratan la que imponen uno u otro método. Los analistas son analistas aunque estudien geometría y los geómetras siguen siendo geómetras aunque estudien análisis puro. Según Poincaré es la propia naturaleza de su espíritu lo que los hace lógicos o intuitivos. Tampoco es la educación o la enseñanza recibida lo que ha desarrollado en ellos una de las dos tendencias.

Los trabajos de Russel (continuador de Frege) parten de conceptos lo más generales posible con la intención de abarcar todo tipo de razonamiento y contenido, intentando redefinir en dicho campo la aritmética con conceptos tales como cardinal de una clase, serie, etc., para concluir que los conceptos de la aritmética son casos particulares de los anteriores. Con seguridad no hubiese llegado a esta conclusión sin conocer previamente los conceptos aritméticos para los cuales busco conceptos más generales que los incluyese. Tal y como he dicho al principio, siempre que hemos establecido una relación conceptual podemos utilizarla en una proposición lógica y esto último no tiene nada que ver con la construcción efectiva del concepto que encierra la relación. Organizar conocimientos en marcos más amplios es posterior a la construcción de los mismos. Difícilmente se podría hacer sin su conocimiento previo. Russell lo que hace es construir todo un andamiaje de relaciones lógicas para redefinir la aritmética que conocía. Intenta buscar definiciones lógicas de conceptos matemáticos como el de número, orden, etc. Ello no quita el interés a sus trabajos ya que nos posibilita en didáctica de la matemática plantear constructos nuevos para interpretar la evolución del pensamiento matemático en los escolares. Tal es el caso de las relaciones de relaciones, de las que la proporción y la razón son casos particulares. El concepto de relación de relaciones que nosotros utilizamos lo define Russell (1988) al estudiar la *similitud entre relaciones.* Define una *relación entre relaciones,* por cumplir respecto a estas el mismo papel que desempeña para las clases la similitud entre clases. Estamos clasificando relaciones: Si tenemos dos rectángulos verdes (uno grande y otro pequeño) y dos rectángulos azules (uno grande y otro pequeño), podemos poner por un lado los azules y por otro los verdes o bien, por un lado los grandes y por otro los pequeños. Si esta tarea la realizan varios escolares obtendremos dos categorías de escolares según la relación establecida. En esto último he aplicado una relación de relaciones. En este ejemplo hemos visto una relación de igualdad o identidad de relaciones establecidas por los sujetos, o sea, dos sujetos pertenecen a una misma clase si ambos han establecido la misma relación. En otros casos pueden ser distintas relaciones pero equivalentes (producen el mismo resultado) para que pertenezcan a una misma clase.

Teniendo en cuenta las relaciones de relaciones Russell (1988) define los números enteros como relaciones de relaciones. Según este autor resulta evidente que +1 y -1 deben ser relaciones y de hecho cada uno debe ser el inverso del otro. +1 es la relación de de n+1 con n; -1 es la relación inversa de n con n+1. Generalizando, si m es un número inductivo (natural) cualquiera, +m será la relación de n+m con n (para todo n) y -m será la relación de n con n+m. Esta última relación es una relación de relaciones. Esta relación de relaciones posibilita en una matemática formal construcciones del número entero por paso al cociente a partir de relaciones de equivalencia.

(Entre los críticos a Russell está Quine (1984). Para Quine la noción de función proposicional oscurece la fundamentación lógica de Whitehead y Russel).

Russell (1988, pág. 177) admite *que si bien todas las proposiciones lógicas (o matemáticas) pueden expresarse por medio de constantes lógicas acompañadas de variables, no se cumple la reciproca de que todas las proposiciones que pueden expresarse de este modo sean lógicas. Se ha definido suficientemente el carácter de las ideas primitivas con las que pueden definirse todas las ideas matemáticas, pero no las proposiciones primitivas a partir de las cuales pueden deducirse todas las proposiciones de la matemática.* Ello significa que los conceptos matemáticos no los podemos obtener de nociones primitivas asignadas en marcos lógicos y que su construcción efectiva es ajena a la lógica formal. Como matemático no conozco aún ningún teorema matemático importante que se haya definido y demostrado en un marco

lógico o por un lógico profesional. Me refiero a un teorema nuevo inédito y que aporte nuevo conocimiento al campo de las matemáticas. Por el contrario si marcos matemáticos definidos a partir de unos axiomas que han posibilitado demostrar ciertos teoremas. Estos sistemas axiomáticos han tenido relevancia como es el caso de los axiomas de Hilbert. (Hilbert ha sido el máximo exponente de los matemáticos formales o analistas, tal y como les llamaba Poincaré.)
Según Boudot, en el análisis del conocimiento matemático, la toma en consideración de las “interpretaciones", el estudio de los modelos de las teorías formales, en definitiva, las consideraciones *semánticas*, deben jugar un papel esencial. A partir de las ideas de Carnap, Boudot concluye que la constitución de la lógica exige que se salga del marco demasiado estrecho de la sintaxis y revindica la incorporación de una semántica propia de la lógica o semántica formal. Dado que el lenguaje de la matemática comprende términos descriptivos, no se puede reducir la lógica de la matemática a una pura sintaxis.
Lakatos (1981) afirma *que la lógica tal vez explique la matemática, pero no puede probarla. La matemática conduce a una especulación sofisticada que es cualquier cosa menos algo trivialmente verdadero. La teoría lógica de la matemática constituye una especulación estimulante y sofisticada, como cualquier otra teoría científica. Si no se demuestra que es falsa permanecerá conjetural para siempre (pág. 35)*
Lakatos está más próximo a un planteamiento heurístico de los descubrimientos matemáticos:
Es importante darse cuenta de que la mayor parte de conjeturas matemáticas aparecen antes de ser probadas, y por lo general son probadas antes de que esté articulado el sistema axiomático en el que puede ejecutarse la prueba de manera formalizada. (pág. 135)

Esta argumentación de Lakatos esta próxima a las ciencias inductivas. Para Boudot, una cosa es inventar una hipótesis que da cuenta de los hechos y otra es probarla o mostrar su solidez. La lógica matemática no es una técnica que exima al matemático del espíritu de la invención.
Borel fue uno de los creadores de la teoría de conjuntos y afirma lo siguiente: *la matemática aparece, de manera cada vez más clara, como la ciencia que estudia las relaciones entre ciertos entes abstractos definidos de manera arbitraria, con la única condición de que estas definiciones no conduzcan a una contradicción. <u>Sería necesario añadir sin embargo, para no confundir la matemática con la lógica, que estas definiciones arbitrarias han sido sugeridas primariamente por analogías con objetos reales</u> (Borel,1962, pág.25).*
Ello coincide con planteamientos como los de Polya. Para Polya la analogía es fundamental para llegar a una conjetura. La analogía guía el razonamiento en el proceso de construcción de una conjetura. *La analogía es una especie de similitud. Objetos semejantes concuerdan unos con otros en algunos aspectos mientras que* ***objetos análogos concuerdan en ciertas relaciones*** *entre sus respectivos elementos* (pp. 57. 1945)

Ha transcurrido más de un siglo desde la crisis de fundamentos y los lógicos no han asumido la teorización y el avance de las matemáticas y ello es un indicador de que difícilmente es asumible por los lógicos el conocimiento matemático y su investigación y, por tanto, los elementos lógicos no son los propios para el avance de la matemática. Tal y como explica Quine, podemos traducir a un lenguaje lógico teorías matemáticas pero solo es eso, una traducción a un lenguaje. El que escribe estas líneas es matemático y no cree que el fin de la lógica sea demostrar que una teoría matemática es traducible a un lenguaje lógico como si los matemáticos pretendieran decir que la física es parte de la matemática por expresarse usando relaciones matemáticas. Así llegaríamos a decir que todo el conocimiento se reduce al lenguaje. Algunos textos de física teórica hacen un mal uso del concepto de derivada en cinemática y no por ello vamos a decir que la cinemática es parte de la matemática aunque todos sus cálculos se pueden expresar y desarrollar matemáticamente. En física hay cálculos matemáticos con interpretaciones físicas y la matemática solo abarca la primero, es decir, los cálculos.

Las proposiciones matemáticas encierran conceptos y procedimientos que dan sentido y significado a una demostración. En matemáticas se razona y se interpreta y la lógica solo abarca el razonamiento. Sin embargo hemos de admitir que ha sido importante el movimiento lógico del siglo XIX para el avance de las matemáticas del siglo XX. Entre otros logros provocó un estudio profundo de los fundamentos de las matemáticas tan necesario para su consolidación como ciencia deductiva (no como ciencia formal) con independencia de los problemas prácticos que ha resuelto. Hoy en día difícilmente se puede entender una matemática sin conceptos tales como el de conjunto, correspondencia y morfismo, relación de equivalencia, estructura algebraica, estructura topológica, etc., todos ellos surgidos a partir de la teoría de conjuntos y su posterior desarrollo.

Objetivos de la investigación en pensamiento matemático
Objetivos

Cuando hablamos de investigación en pensamiento matemático ¿a qué nos estamos refiriendo?. En una primera aproximación, podemos contestar diciendo que pretendemos ver como funcionan los razonamiento lógicos en contextos matemáticos. En estos contextos el razonamiento se realiza con contenidos específicos y propios de la matemática.
Las pruebas realizadas tienen como finalidad observar las relaciones aritméticas que establecen los escolares a partir de situaciones elementales que les presentamos. Estamos evaluando su pensamiento matemático en contextos aritméticos.
En la escuela hay varias cuestiones centrales cuyas respuestas hay que obtenerlas a partir de investigaciones centradas en los alumnos. Entre otras:

1) Si los modelos lógicos de razonamiento son utilizados por los escolares de Educación Primaria en contextos matemáticos
2) ¿Influyen los conceptos matemáticos a la hora de razonar sobre ellos o con ellos? Hasta que punto podemos decir que un concepto matemático esta construido en el escolar si no es capaz de utilizarlo en una argumentación lógica. El “saber” por un lado y “nuestro saber” por otro, condicionan lo que podemos pensar.
3) Que predomina en un lógico al desarrollar un modelo, sus conocimientos de lógica o, por el contrario, su pensamiento. El lógico pretende que se acepte su trabajo en un paradigma lógico y esto último puede que haga que el modelo esté distante de una manera ingenua de pensar o razonar por un niño cuando le planteamos un problema lógico en un contexto matemático.

Los trabajos de Piaget parten de supuestos lógicos y los nuestros de supuestos matemáticos. Para Piaget *la lógica es una axiomática de la razón, de la que la* *psicología de la inteligencia es la ciencia experimental correspondiente (Piaget, 1980, pág. 37).* Los modelos de las estructuras psicológicas del pensamiento humano son a imagen y semejanza de las estructuras lógicas aunque no haya una identificación directa entre ambos tipos de estructuras. En su ensayo de lógica operatoria hace constar que las relaciones aritméticas abarcan tanto relaciones lógicas como otras que no son contempladas por los lógicos, admitiendo que en aritmética se establecen tanto relaciones intensivas como extensivas y que la lógica solo abarca las primeras. De donde se desprende que, *o bien las matemáticas constituyen en si mismas su propia lógica, o bien requieren la construcción de una lógica matemática especial, elaborada por medios matemáticos (Piaget, 1977. Pág. 99)*

Los fundamentos lógicos de la matemática provocaron una enseñaza de la aritmética basada en la teoría de conjuntos, en contradicción con la propia evolución del pensamiento del niño: en la enseñanza conjuntísta de la aritmética se parte de nociones generales como la de conjunto para definir conceptos aritméticos particulares como número y sus operaciones. Aunque intuitivo, es imponer un método razonamiento deductivo de generales a particulares, impropio de escolares cuyo razonamiento, según Piaget, es inductivo, es decir, de particulares a generales. Esta enseñanza se extendió por Europa en la segunda mitad del siglo XX.

Ya en el siglo XXI, si observamos los libros de texto actuales de matemáticas para escolares de Educación Primaria, podemos ver que a pesar de no partir de la teoría de conjuntos no ha significado un abandono de los modelos conjuntistas sin más. Al estudiar las expresiones utilizadas vemos que perduran léxicos propios de construcciones lógicas de la aritmética y por tanto, también en la enseñanza actual de la matemática han dejado su huella los planteamientos lógicos de la aritmética. En este contexto escolar de enseñanza de la matemáticas hemos realizado nuestra investigación.

Experimento 1

Con la intención de partir del razonamiento lógico en aritmética para discriminar a los sujetos objeto de nuestro estudio, se aplico el test de razonamiento inductivo numérico de Ortiz (Ortiz, 1997; Moya 1999) a una población de 400 escolares de Educación Primaria. Al tratarse de una escala acumulativa en razonamiento numérico, para la validación estadística de los resultados de acuerdo con las condiciones de aplicación del test, se calcularon, entre otros, los coeficientes de reproductibilidad de Guttman, obteniéndose un valor de 0,993125 superando el mínimo exigido de 0,90. La consistencia interna de la escala se mide mediante el coeficiente de Borgatta. Se obtuvo un valor de 0,0824, próximo a 0 que es el correspondiente una escala acumulativa perfecta. El test consta de seis tareas y constituye una escala acumulativa de Mokken. La acumulatividad significa que los ítems están ordenados de manera que el escolar que responde correctamente una tarea distinta de la primera, ha contestado correctamente todas las anteriores. El nivel que se le asigna al escolar es el lugar que corresponde a la última tarea contestada correctamente.

Aplicado el test y de acuerdo con los resultados obtenidos se clasificaron los alumnos en seis niveles. La distribución de los alumnos de cada nivel por edades y por cursos se puede observar en la tabla 1. Podemos ver como los niveles N3 y N4 abarcan unos intervalos de mayor amplitud de edades y cursos. Nos encontramos niños del nivel N4 con edades comprendidas entre los siete años y los doce años y distribuidos desde segundo curso a sexto curso de Educación Primaria. En segundo curso y quinto curso de Educación Primaria nos encontramos con alumnos muy dispares distribuidos en cuatro niveles. Lo mismo ocurre con los alumnos de 7 años y 11 años. Ello significa que un profesor se encuentra en una clase con desniveles importantes en pensamiento aritmético lo que dificulta la comprensión por igual de las enseñanzas recibidas.

Nivel	**Edades**							**Cursos**					
N1	6	7						1	2				
N2	6	7	8					1	2				
N3		7	8	9	10	11			2	3	4	5	
N4		7	8	9	10	11	12		2	3	4	5	6
N5					10	11	12				4	5	6
N6						11	12					5	6

Los alumnos proceden de distintos tipos de centros escolares, tanto públicos y privados, como urbanos y rurales.

Conclusiones del experimento 1

1. Los escolares de Educación Primaria (6-12 años) presentan grandes desniveles o desfases en razonamiento inductivo numérico. Los escolares de una misma edad pueden presentar cuatro niveles como ocurre a los 7 y 11 años. Como mínimo se presentan dos niveles a los 6 y 9 años que son los grupos de edad más homogéneos.
2. Los niveles N2 y N4 producen un escalonamiento, en el sentido de de barrera para los alumnos de seis años y primer curso y barrera para los alumnos de nueve años y tercer curso, respectivamente. Así, podemos observar que los cuatro niveles que se presentan en los escolares de 7 años, se reducen a dos a los nueve años siendo el tope máximo el nivel N4. El nivel N4 es el máximo durante tres años. Hay que esperar a los 10-11 años para pasar esta barrera y encontrarnos con escolares de los dos niveles superiores.
3. De acuerdo con los datos a partir de los siete años los escolares se van acumulando progresivamente en el nivel N4, hasta los 10-11 años que se produce una expansión hacía los niveles superiores
4. El nivel N4 es el más persistente en Educación Primaria, se presenta en escolares con edades comprendiditas desde los siete años hasta los doce años o, desde segundo curso hasta sexto curso.

Experimento 2: Entrevistas clínicas semiestructuradas

El significado de las entrevistas semiestructuradas como técnica de investigación puede estudiarse en Cohen y Manion (1990, pág. 377) o en Ortiz (2001).
Para simplificar el trabajo decidimos unificar la entrevista y el análisis de tareas en un solo procedimiento, en el mismo sentido ya utilizado en varios estudios sobre el razonamiento inductivo dentro de un paradigma mediacional, en el marco de la teoría de la continuidad: Bruner, Goodnov y Austin (1958); Restle y Grenno (1970) Egan y Grenno (1974). En nuestro caso vamos a proponer a cada alumno entrevistado la realización de una tarea manipulativa con una cierta componente lúdica que actúa como campo de observación y como soporte de la entrevista.

Objetivos

Dos han sido los objetivos:

1) Aportar datos para ir describiendo los perfiles en pensamiento matemático de los escolares según los distintos niveles alcanzados en razonamiento inductivo numérico
2) Realizar un estudio transversal para determinar la evolución del pensamiento matemático de los escolares de 6 a 12 años en el establecimiento de *relaciones de relaciones en aritmética*

Selección de la muestra

En cuanto al primer objetivo, los alumnos de un mismo nivel deben presentar el mismo perfil con independencia de la diferencia de edad o curso. Ello nos llevó a seleccionar niños de la misma edad por una parte y del mismo curso por otra, pero en ambos casos de distinto nivel, con la intención de comprobar que su pensamiento aritmético es distinto. Recíprocamente se seleccionaron escolares de cada nivel pero de distinta edad por una parte y de distinto curso por otra, para comprobar que con independencia de la diferencia de edad o de curso, si pertenecen a un mismo nivel establecen el mismo tipo de relaciones numéricas. En definitiva, dar pruebas de que todos los alumnos de un nivel son semejantes en su lógica del pensamiento aritmético. Ello nos llevo a elegir una muestra de 28 escolares que abarcan alumnos de los seis niveles obtenidos en el experimento 1.

Tareas

Las tareas propuestas se corresponden con un estado avanzado del pensamiento matemático en consonancia con una evolución a la formalización del pensamiento aritmético y, por tanto, con el inicio del álgebra o del pensamiento algebraico.
Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debe hacer grupos de parejas, de manera que en cada grupo deben estar todas las parejas de números que guardan entre sí las misma relación.
El objeto de las tareas es estudiar si el alumno identifica dos relaciones equivalentes, es decir, si establece o no analogía entre parejas de números. Dos parejas son equivalentes si en cada una de ellas se puede establecer la misma relación aritmética: (a,b) es equivalente a (a',b') si existe una relación aritmética R tal que aRb y a'Rb'. Donde a, b, c' y d' son números naturales.

Material

Para cada uno de los seis niveles obtenidos en el estudio cuantitativo hemos construido cuatro parejas de números imitando las fichas del dominó. Las relaciones aritméticas asociadas a las parejas son propias del nivel correspondiente. La dificultad añadida es el establecimiento de una relación de relaciones. Se han establecido relaciones de "relaciones propias de cada nivel" .
Para cada uno de los niveles las fichas han sido:

Nivel 1:

2	**12**	**32**	**42**	**52**	**42**	**92**	**82**

Nivel 2

3	**5**	**7**	**9**	**29**	**27**	**84**	**82**

Nivel 3

2	**8**	**3**	**9**	**1**	**13**	**41**	**53**

Nivel 4

9	**1**	**38**	**30**	**72**	**59**	**95**	**82**

Nivel 5

2	**6**	**3**	**9**	**2**	**8**	**3**	**12**

Nivel 6

15	**5**	**12**	**4**	**6**	**3**	**8**	**4**

Desarrollo de la entrevista

La entrevista tiene una primera parte introductoria muy elemental, para asegurar que los alumnos comprenden el mecanismo de la misma. En esta primera parte se le presenta a cada entrevistado cuatro rectángulos desiguales (dos azules y dos verdes) y se le pide que los empareje. Una vez emparejados se le pregunta en que se ha basado o porqué los ha agrupado de esa manera (debe contestar "por el color")

A continuación le presentamos una ficha de dominó con dos números (2 y 12) y nos debe decir que relación puede haber entre ellos diciendo en que se parecen y en que son distintos el 2 y el 12.

A continuación ponemos sobre la mesa las cuatro fichas de dominó correspondiente al primer nivel, las movemos y le presentamos posibilidades de emparejamiento (pueden ir así, poniendo dos en un lado y las otras dos en otro, o bien así, o bien así, , o así, etc.). Se le hace ver que los emparejamientos deben tener un motivo (existe una relación como las que estableció anteriormente) y que cuando junte dos parejas tiene que decir porque deben estar juntas. Se le explica que le vamos a presentar cuatro parejas de números y debe emparejar o juntar, de dos en dos o bien dos en un lado y dos en otro

lado, las que van de la misma manera tal como lo hizo con los rectángulos de colores. Se le pregunta a continuación si sabe lo que tiene que hacer.
A continuación se le dice al escolar que las empareje como él crea conveniente. Una vez agrupadas se le pregunta: *¿porqué las has colocado así?*
Una vez que ha respondido, se le pregunta: *¿Puedes explicármelo de otra manera?; ¿ves otro motivo distinto al que me has dicho?; ¿Se te olvida algo?.*
Por último, se le pregunta si es capaz de emparejarlas de alguna otra manera.

Resultados y conclusiones del estudio 2

En la tabla 1 vemos la distribución de alumnos que han establecido este tipo de relaciones en las distintas tareas. En la segunda columna representamos nivel, edad y curso del escolar. En las restantes columnas se representan los niveles de las diferentes tareas.
Observando las respuestas correctas llegamos a las siguientes conclusiones:

a) Se trata de tareas propias del nivel N6. Los escolares que se adaptaron a lo que se les pedía han sido: Alejandra, Diego, Rocío y Francisco. Correspondientes a los niveles N5 y N6. Sus respuestas se han dirigido directamente a comparar relaciones y no se han detenido a estudiar otras posibilidades.
b) Isaac y Sergio pertenecientes al nivel N4 son los más jóvenes en encontrar alguna relación entre relaciones, lo que no significa su adaptación plena a la prueba, ya que detectan estas relaciones por ensayo y error, es decir, a base de proponer varias soluciones.

		N1	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**
Carlos	(N1, 6, 1)						
Salvador	(N1, 7, 2)						
María	(N2, 6, 1)						
Damián	(N2, 6, 1)						
Gema	((N2, 6, 1)						
Manuel	(N3, 9, 3)						
Marta	(N3, 11, 5)						
Alberto	(N4, 7,2)						
Rocío	(N4, 7, 2)						
Pedro	(N4, 7, 2)						
Gonzalo	(N4, 9, 3)						
Miguel	(N4, 9, 3)						
Isaac	(N4, 9, 3)			+	+		
Sergio	(N4, 9,4)		+		+		
Lucía	(N4, 9, 4)						
Rubén	(N4, 9, 4)						
Manuel	(N4, 10, 4)						
Blas	(N4, 10, 4)	+	+				
Antonio	(N5, 10, 4)						
Ana Mª	(N5, 11, 6)						
Alejandra	(N6, 10, 5)	+	+	+	+	+	+
Pablo	(N6, 10, 5)		+	+	+	+	+
Diego	(N6, 10,5)	+	+	+	+		

Ricardo	(N6, 11, 5)						
Marta	(N6, 11,6)		+		+		
Rocío	(N6, 11, 6)	+	+	+	+	+	+
Raquel	(N6, 12, 6)						
Francisco	(N6, 12, 6)	+	+	+	+	+	+

Tabla 1. Distribución del establecimiento correcto de relaciones de relaciones

c) Salvo los escolares del nivel N6 que contestaron correctamente estableciendo las relaciones esperadas por el investigador, los demás escolares intentan justificar de algún modo los emparejamientos. La estrategia que han utilizado estos escolares ha sido juntar las parejas dos a dos y pensar. Si no podían encontrar una justificación las emparejaban de algún otro modo. Lo que es importante es que siempre han utilizado estrategias que nosotros consideramos propias de su nivel. Los esquemas que han manifestado estos escolares los hemos organizado en cuatro categorías: Correspondencia representacional, clasificación representacional, ordinal representacional y aditivo representacional. Representacional significa tener en cuenta características del sistema de escritura (tener dos cifras iguales, terminar en una misma cifra, en todas las parejas hay una cifra común, etc. Propios de los niveles N1 y N2)

1) Correspondencia representacional

Considerando cada pareja como un conjunto de dos elementos y estableciendo una correspondencia con un criterio representacional.

Carlos (N1, 6, 1)

3.1.a

(92 82)
(2 12)
"El dos con el dos"

3.1.b

(32 42)
(52 42)
"Juntos el dos con el dos"

Salvador (N1, 7, 2)

3.1.a

(2 12)
(32 42)
"Aquí también el dos contra el dos y el dos contra el dos. Estos tienen un número delante"

3.1.b

(92 82)
(52 42)
"Este se parece en el dos contra el dos y el dos contra el dos. Estos tienen un número delante"

Gema (N2,6,1)

3.1.a

(32 42)
(52 42)

Señalando el cuarenta y dos de cada pareja: *"Estos dos sitios tienen cuarenta y dos"*

3.1.b

(2 12)
(92 82)

Cubriendo el ocho y el uno, dice: *"Estos tienen dos"*

2) Clasificación representacional

Aplicando una correspondencia con un criterio clasificatorio representacional:

Salvador (N1, 7,2)

3.2.a

(7 9)
(3 9)

"este tiene un número"

3.2.b

(29 27)
(84 82)

"Este tiene dos números. No va ir un número contra dos"

Rubén (N4, 9, 4)

3.2.a

(84 82)
(29 27)

"Estos tienen dos cifras"

(7 9)
(3 5)

"Estos tienen una cifra"

3) Ordinal representacional

El establecimiento de la correspondencia se basa en aspectos ordinales de la serie numérica:

Rocío (N4, 7, 2)

3.3.a

(3 9)
(2 8)

"El ocho y el nueve. El dos y el tres...contando.."

María (N2 , 6, 1)

3.3.a

(3 9)
(2 8)

"El dos va delante del tres y el ocho va delante del nueve"

3.4.a

(38 30)
(8 1)

"Después del treinta va el treinta y uno y después del treinta y ocho va el treinta y nueve"

4) **Aditivo representacional**

Establecimiento de una correspondencia aditiva:

Sergio(N4, 9,4)

3.3.a

(41 53)
(1 13)

*"Le han sumado en este número cuatro (*se refiere a las decenas de 13). *Aquí como solo hay un uno le han añadido un cuatro* (A cero decenas)

3.3.b

(15 5)
(12 4)

"Del cuatro al cinco le han añadido una y del dos al cinco le han añadido tres"

Los escolares del nivel N4 al no poder establecer una relación de relaciones, optan por interpretar la situación con estrategias propias de niveles inferiores.

Consecuencias para la enseñanza

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos

a) Desde que el escolar asimila un conocimiento instrumental, algorítmico o funcional, hasta que lo utilice como instrumento de análisis para establecer relaciones aritméticas transcurren más de dos años.
b) El hecho de que se sepa resolver un problema aritmético de sumar o multiplicar, se dominen los algoritmos de estas operaciones y se interprete correctamente más de un significado de las operaciones aritméticas, no son garantías para el profesor de un desarrollo del pensamiento matemático de sus escolares para poder iniciar en su clase de matemáticas temas como la proporcionalidad o un inicio al álgebra.
c) En Educación Primaria es necesaria una labor didáctica paralela, potenciando el establecimiento de relaciones desde los niveles representacionales hasta los

aritméticos con el objetivo de conseguir que la mayoría de los alumnos lleguen al nivel N6 en razonamiento inductivo numérico, que según nuestros resultados garantizan el establecimiento de relaciones de relaciones, necesarias para las generalizaciones algebraicas y un razonamiento deductivo.

Referencias

Andréiev, I. (1984). *Problemas lógicos del conocimiento científico.* Moscú: Editorial Progreso.

Borel, E. (1962). *La definición en matemáticas.* En LeLionnais y colaboradores. "Las grandes corrientes del pensamiento matemático" Buenos Aires: Eudeba. S.E.M. pp. 25-35

Boudot, M. (1978) *Lógica inductiva y probabilidad*. Madrid: Paraninfo.

Bruner, Goodnov y Austin (1958). A study of thinking. New York: Wiley

Cohen,L.; Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Muralla.

Egan, D.E. y Greenno, J.G. (1974). *Theory of rule induction: Knowledge acquired in concept learning, serial pattern learning, and problem solving*, en L.W. Gregg (comp), Knowledge and cognition. Hillsdale, N.J., Erlbaum

Fernández, C.; Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en escolares de 3 a 6 años. *Infancia y aprendizaje,* 31(1), pp. 107-130.

Frege,G. (1984). *Estudios sobre semántica*. Barcelona: Editorial Ariel S.A.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Universidad.

Mill, J.S (1843). Sistem of logic. London. Traducción castellana de Eduardo Ovejero y Maury (1917): Sistema de Lógica Inductiva y deductiva Madrid. Daniel Jorro Editor.

Moya, T. (1999). Ajuste del modelo de Mokken con el programa MSP 4.0. Una aplicación con ítems de razonamiento inductivo numérico. *Revista Electrónica de Metodología Aplicada*. Vol. 4 n2, pp. 37-70 http://www.psico.uniovi.es/REMA/v4n2/a3/

Ortiz, A. (2001). *Entrevistas semiestructuradas. Una aplicación en Educación Primaria*. Actas II Simposio de la SIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) (pp. 33-55). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Ortiz, A.; González,J.L.(2001) El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número. *Revista Aula.* Vol. 10. pp. 65-87

Ortiz, A., Fernandez, C. (2007). *Razonamiento Inductivo Numérico. Modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil.* En: Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento numérico. Encarnación Castro y José Luis Lupiañez (eds). Universidad de Granada
Cap. V. (pp. 101-127).

Piaget, J. (1977). *Ensayo de lógica operatoria.* Buenos Aires: Editorial Guadalupe.

Piaget, J. (1980). *Psicología de la inteligencia.* Buenos Aires: Editorial psique.

Poincaré, H. (1964). *El valor de la ciencia.* Madrid: Espasa-Calpe S.A.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. USA. Versión en castellano: Cómo plantear y resolver problemas México: Edtorial Trillas. 1978.

Quine, W. (1984). *Desde un punto de vista lógico.* Barcelona: Ediciones Orbis

Restle, F. (1962): The selection of estrategias en cue learning *Psychologhical Review* 69, pp. 520-536.

Restle, F. y Grenno, J.G. (1970). *Intoduction to Mathematical Psychology*. Reading. Mass: Addison-Wesley.

Russel, B. (1988). *Los problemas de la Filosofía*. Barcelona: Editorial Labor