1.4.- Epistemología y Educación Matemática: Tendencias; discusiones; situación actual. (relacionado estrechamente con la investigación en E. M.)

1.4.1.- Epistemología y Educación Matemática: Algunas consideraciones epistemológicas en torno al campo de la Educación Matemática y sus fenómenos.

Ejercicios de reflexión epistemológica; Necesidad de los análisis epistemológicos; La epistemología en la formación de profesores; Ejemplos: los números enteros

1.4.2.- Epistemología de la Educación Matemática: ¿cuál es la naturaleza y modo de existencia de los conocimientos generados en el campo?; ¿estamos hablando de un área científica?

Problemas de la Educación Matemática: Externos: Valores socioculturales, etc.; internos; Freudhental: ¿porqué jenifer no sabe . . .?; Informes varios; interdisciplinariedad vs multidisciplinariedad (Análisis Didáctico)

Algunas tendencias: arte vs ciencia; TME (Steiner); Bishop; Bell, A., la enseñanza por diagnóstico y Action research; Fischbein; Vergnaud; Nuestra posición

Epistemología de la Matemática y Educación Matemática

Epistemología de la Matemática y Educación Matemática.

Algunas *preguntas* importantes en Educación Matemática:

Sobre el **aprendizaje:** ¿Que es aprender matemáticas?
¿Qué es saber matemáticas?
¿Cómo se aprenden?

Sobre la **enseñanza**: ¿Que es enseñar matemáticas?
¿Que matemáticas enseñar?
¿Cómo se enseñan?

¿Que es aprender matemáticas?. Se puede situar la respuesta en el contínuo siguiente:

aprendizaje activo	**aprendizaje pasivo**
construir matemáticas hacer matemáticas	escuchar, imitar y recibir pasivamente el conocimiento matemático. Ejercitar-repetir

¿Que es construir matemáticas?. Se puede contestar desde distintas posiciones epístemológicas:

Formalismo: Construcción de los sistemas formales explícitos y consistentes. Construcción del producto final. Creación de fórmulas con mero valor sintáctico. No se consideran ni el proceso seguido ni el conocimiento implícito.

Intuicionismo: llegar al conocimiento matemático (puede ser el formal), paulatinamente a partir de las intuiciones inmediatas y autoevidentes. Crear matemáticas a partir de la intuición.

Matemáticas: Historia y Epistemología

¿Qué es el conocimiento matemático?
¿Qué es la Matemática?

¿De qué manera es posible la matemática?;

¿cómo su desarrollo ha sido y sigue siendo indefinidamente posible?;

¿de donde proviene su conformidad con lo real?

a).- ¿De que manera es posible la Matemática?. ¿Como su desarrollo ha sido y sigue siendo indefinidamente posible?.
b).- ¿De donde proviene su conformidad con lo real?

¿Cual es la naturaleza y existencia de los objetos matemáticos?
¿Que es la Matemática?

Enfoques dogmáticos y criticos

Escépticos

El trabajo del matemático

Análisis psicogenético (ontogenético)

La Historia

Métodos

Análisis histórico-crítico (filogenético)

El problema de los fundamentos

establecer el significado y la verdad

Análisis lógico-formal

Algunos problemas derivados

¿Invención, descubrimiento, construcción, . .?
¿Deducción-inducción?
¿Intuición-experimentación?
¿Verdad-falsedad?
¿Demostración-justificación plausible?
Límites. Relaciones.
. . . .

<u>Platonismo</u>

Los **objetos matemáticos** son objetos reales; no son ni físicos ni materiales; son inmutables; no son creados; no pueden cambiar ni desaparecer; pertenencen a un "mundo de las ideas" existente con independencia del individuo y fuera de él.
Los objetos matemáticos **existen** con independencia completa del conocimiento que de ellos se tenga, fuera del espacio y el tiempo de la existencia física.
El **trabajo del matemático** platónico, es un trabajo empirísta; no inventa sino que descubre; utiliza la percepción y la intuición matemática.
La mayor parte de los matemáticos son platonistas o se encuentran entre el platonismo y el formalismo según conviene.
Fueron platonistas: Gödel, Thom, Hermite, Hardy, Hadamard, etc.

<u>**Formalismo (Hilbert)**</u>

La Matemática es un juego desprovisto de significado constituído por axiomas, definiciones, teoremas y fórmulas; son un producto del pensamiento humano.
No tiene sentido hablar de la **naturaleza** de los objetos matemáticos puesto que no existen; sólo hay reglas y cadenas de símbolos.
Las fórmulas y símbolos no tienen valor de verdad puesto que no tienen sentido o significado alguno por sí mismas. Sólo cuando se aplican a algún problema real adquieren significado.

Logicismo

Mas que corriente se trata de una postura histórica surgida en plena crisis de fundamentos. Considera la lógica como anterior o más fundamental que la matemática, reduciendo a esta, a una rama de la lógica.

Los argumentos de los logicistas (Russell, Frege, etc.), son rechazados por los formalistas y los intuicionistas.

Constructivismo matemático - intuicionismo

La única matemática es la que proviene de construcciones finitas. Ni el conjunto de los números reales ni ningún conjunto infinito puede ser obtenido de tal manera.
Los objetos matemáticos tienen significado y existen en la medida en que se construyan mediante un número finito de pasos a partir de los números naturales.
Se caracteriza por la negativa a participar en la aceptación de un mito; la matemática clásica es una aberración. No aceptan el principio del tercio excluso y por tanto, gran parte de la matemática al afectar a la ley de tricotomía.
Brouwer (1908) dió un contraejemplo a la ley de tricotomía construyendo un número del que no se puede demostrar constructivamente que sea cero, positivo o negativo; según su punto de vista, dicho contraejemplo demuestra la falsedad de la ley de tricotomía.

Formalismo contemporáneo

Descendiente del formalismo hilbertiano aunque no exactamente igual a él.

Hilbert distinguía entre las matemáticas finitas y las matemáticas infinitas. Las segundas fueron inventadas para justificar las primeras. El matemático formalista contemporáneo, no hace distinciones: todas las matemáticas son un juego de deducciones lógicas (la matemática es la ciencia de la demostración rigurosa).

Cuasi-empirísmo (Lakatos)

El conocimiento matemático es falible. Se caracteriza por ser un sistema hipotético-deductivo pero en el que lo que se transmite no es la verdad desde las premisas verdaderas a las conclusiones, sino la falsedad desde los resultados a los axiomas.

La Historia de la Matemática es considerada como elemento central de esta posición filosófica.

La matemática informal, práctica, en construcción, es más importante que la matemática formal o acabada. El descubrimiento matemático se produce en la elaboración de teorías matemáticas informales, caracterizadas por la dialéctica conjeturas-refutaciones y la constante utilización de contraejemplos. Esta corriente, conlleva una teoría sobre la creación del conocimiento matemático.

Constructivismo social

Corriente muy reciente (Ernest, Paul; 1991), que considera el conocimiento matemático como una construcción social: las bases del conocimiento matemático están en el conocimiento lingüístico, en sus convenciones y reglas; el conocimiento matemático subjetivo, se convierte en objetivo mediante la comunicación y publicación; la objetividad del conocimiento es social; etc. (ver libro del autor "The Philosophy of Mathematics Education". The Falmer Press).

La Matemática a través de las actividades culturales básicas

contar, situar, medir, diseñar, jugar y explicar

Bishop (1988),

La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático

Elaboración con comentarios añadidos a partir de: Hersch, R. "Some proposal for reviving the Philosophy of Mathematics". En: Tymoczko, T. (1986), pp. 9-28.

La Matemática tiene que ver con ***ideas*** **u** ***objetos conceptuales***.

Dichos objetos ***son independientes de su simbolización o representación*** ya sea lingüística ó mediante objetos materiales que los sugieran.

Los objetos matemáticos, son ***inventados o creados*** por los seres humanos (a diferencia de los objetos materiales), de una forma ***peculiar e irreductible*** y por tanto:

tienen una ***existencia ficticia ó convencional***.

… / ...

La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático

La creación, ***no es arbitraria*** sino que involucra actividades con objetos matemáticos ya existentes y tiene que ver en muchos casos con las necesidades de las ciencias y de la vida diaria.

Los objetos matemáticos ya creados, ***tienen propiedades objetivas*** bien determinadas, que poseen con independencia del conocimiento que de ellos se tenga.

Los objetos matemáticos, a pesar de ser creaciones humanas sobre abstracciones y objetos matemáticos ya existentes, sin ninguna relación aparente con la realidad, ***llegan a ser útiles para la descripción y el manejo de fenómenos naturales ó materiales***. … / ...

La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático

Los objetos matemáticos, una vez creados y comunicados, pasan a formar parte de la cultura, del patrimonio de conocimientos válidos, consistentes y creíbles (si son aceptados en éstos términos), adquiriendo entonces una categoría de realidad distinta de la del sujeto individual y de la del mundo exterior: una ***tercera realidad*** a la que pertenecen las tradiciones, las costumbres, las creencias, etc., que no se encuentra ni dentro ni fuera del individuo aunque compartiendo ambos lugares. Existen en la mente como objetos conceptuales sobre los que pensar (existencia conceptual o individual), y al mismo tiempo, una vez aceptados y siempre que exista algún ser capaz de pensar sobre ellos, existen *realmente* fuera de la mente del que los creó, como parte del patrimonio cultural ***(existencia supraindividual ó cultural)***. (Mundo 3 de Popper). … / ...

La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático

Las ideas matemáticas, son ***ideas compartidas***, como si hubiese algo de común en todas las mentes que las piensan, como si existiese una *conciencia compartida* formada por un conjunto de ideas con propiedades objetivas. Coincidencias que pueden tener su explicación en lo que hay de común a todos los individuos: mente, medio y la interacción entre ambos.

… / ...

La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático

El hacer matemático presenta las características de toda actividad y conocimientos humanos, a saber: ***perfectibilidad, sujección a errores, parcialidad e incompletitud*** , etc, lo cual induce a poner en duda que la Matemática sea una fuente de verdades universales y absolutas. La historia precisamente nos da la razón en la medida en que la noción de verdad, ha sido siempre relativa a un marco histórico, a las ideas filosóficas dominantes y a las necesidades sociales, científicas y culturales de cada época.

… / ...

<u>**La Matemática a través del análisis del trabajo del matemático**</u>

Con estas consideraciones, y teniendo en cuenta el trabajo matemático contemporáneo, nos da la impresión de que <u>**la Matemática tiende a dar explicaciones formales del pensamiento humano (estructuras madres, categorías, probabilidad subjetiva, etc), de su funcionamiento y de sus interpretaciones de la realidad. Parece que se va encerrando en la mente que la crea, intentando dar explicación de su propio funcionamiento.**</u>

En resúmen:

El conocimiento matemático es un conocimiento perfectible, sujeto a errores, párcial e incompleto que tiene que ver con ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación, a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias, con una existencia ficticia o convencional que comparte dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida.

Las diferentes corrientes y posiciones epistemológicas no son más que enfoques parciales, a veces extremos, que atienden exclusiva o prioritariamente a alguno de los aspectos mencionados, tratando de describir una parte de la naturaleza y modo de existencia del conocimiento matemático.

<u>Avanzando un poco más:</u>

Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la actividad matemática (Puig, L., 1997, pág. 67).

En: Rico, L. y otros (1997).- La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. ICE Univ. de Barcelona.

Una explicación plausible:

La creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

Algunas consecuencias:

1.- La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción), se produce, aunque quizás en distinta medida, en todas y cada una de las interpretaciones sobre la naturaleza, modo de existencia y formas de producción del conocimiento matemático. En unos casos dicha intervención es clara y directa (platonismo, intuicionismo, cuasi-empirísmo, constructivismo social), mientras que en otros (formalismo, logicismo) se produce una influencia indirecta de los mismos (todo juego de reglas es producto del pensamiento humano, el cual se configura en un medio concreto).

Algunas consecuencias:

2.- El análisis sobre la naturaleza y el modo de existencia del conocimiento matemático debe tener en cuenta:

- las características de la **mente humana** (instrumentos y estructuras conceptuales; funciones cognitivas; formas de representación del conocimiento, entre otras),
- las características del **medio** (fenómenos, cuestiones y problemas que constituyen el campo de actuación; factores lingüísticos y socioculturales que afectan a la expresión y comunicación del conocimiento, entre otras)
- las características de la **interacción** (necesidades individuales, socio-culturales y científicas; formas de utilización del conocimiento ya existente, entre otras).

<u>Algunas consecuencias:</u>

3.- El análisis del conocimiento matemático desde una perspectiva educativa debe incluir:

- el *análisis epistemológico* (histórico-crítico y lógico-formal),
- el *análisis cognitivo*;
- el *análisis fenomenológico*, que se han de complementar y relacionar estrechamente con un:
- *análisis sobre la enseñanza y el currículo* como aspectos específicos y terminales de la Educación Matemática;