2.1.- Epistemología y Educación Matemática

Algunas reflexiones epistemológicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Fenómenos: ejemplos, alcance, ámbitos e instituciones, personas, modalidades y tipos.

Las relaciones entre la Epistemología y la Educación Matemática son múltiples y muy intensas. Desde la naturaleza del conocimiento matemático bajo la óptica educativa, las implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje, hasta la fundamentación epistemológica de la investigación en Educación Matemática, pasando por la epistemología de la Psicología o de la Pedagogía, hay todo un arsenal de relaciones que constituyen fuentes de datos para los fenómenos educativos en matemáticas. Aquí, tan sólo trataremos algunas de dichas relaciones; las que nos parecen que pueden ser útiles para fundamentar el plan de formación que proponemos.
Algunas de las cuestiones que interesan desde el punto de vista más general son las siguientes:

Sobre el aprendizaje: ¿Que es aprender matemáticas?
¿Qué es saber matemáticas?
¿Cómo se aprenden?
Sobre la enseñanza: ¿Que es enseñar matemáticas?
¿Que matemáticas enseñar?
¿Cómo se enseñan?

Como ejemplo de las reflexiones en este terreno, baste con citar los aspectos generales del campo de reflexión en relación con la pregunta: ¿Que es aprender matemáticas?. Las respuestas se pueden situar en el contínuo siguiente:

aprendizaje activo	**aprendizaje pasivo**
construir matemáticas hacer matemáticas	escuchar, imitar y recibir pasivamente el conocimiento matemático. Ejercitar-repetir

Asímismo, en relación con la pregunta: ¿Que es construir matemáticas?, se puede contestar desde distintas posiciones epistemológicas, como por ejemplo:

Formalismo: Construcción de los sistemas formales explícitos y consistentes. Construcción del producto final. Creación de fórmulas con mero valor sintáctico. No se consideran ni el proceso seguido ni el conocimiento implícito.

Intuicionismo: llegar al conocimiento matemático (puede ser el formal), paulatinamente a partir de las intuiciones inmediatas y autoevidentes. Crear matemáticas a partir de la intuición.

A pesar de que en algunas cuestiones intervienen nuevos elementos no considerados en la epístemología de la matemática (psicología, sociología, etc.), se puede comprobar que las respuestas hacen siempre referencia a consideraciones epistemológicas sobre el conocimiento matemático.

(ver documento sobre un esquema completo en la página siguiente)

Simposio: Plan para la formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Epístemología y Educación Matemática. Reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. González Marí, J.L.

Algunas *preguntas epístemológicas* importantes en Educación Matemática:

Sobre el **aprendizaje:** ¿Que es aprender matemáticas?; ¿Qué es saber matemáticas?; ¿Cómo se aprenden?

Sobre la "**enseñanza**": ¿Que es enseñar matemáticas?; ¿Que matemáticas enseñar?; ¿Cómo enseñarlas?

....

¿Que es aprender matemáticas?. Se puede situar la respuesta en el contínuo siguiente:

aprendizaje activo	aprendizaje pasivo
construir matemáticas hacer matemáticas	escuchar, imitar y recibir pasivamente el conocimiento matemático. Ejercitar-repetir

¿Que es construir matemáticas?. Se puede contestar desde distintas posiciones epístemológicas, Por ejemplo:

Formalismo: Construcción de los sistemas formales explícitos y consistentes. Construcción del producto final. Creación de fórmulas con mero valor sintáctico. No se consideran ni el proceso seguido ni el conocimiento implícito.

Intuicionismo: llegar al conocimiento matemático (puede ser el formal), paulatinamente a partir de las intuiciones inmediatas y autoevidentes. Crear matemáticas a partir de la intuición.

A pesar de que en algunas cuestiones intervienen nuevos elementos no considerados en la epístemología de la matemática (psicología, sociología, etc.), las respuestas hacen siempre referencia en último término a consideraciones epístemológicas sobre el conocimiento matemático.

¿Que es enseñar matemáticas?. Hay muchos planos a los que atender. Algunos de ellos se pueden simplificar mediante esquemas contínuos que ejemplifican posiciones extremas:

Explicar, repetir, realizar ejercicios de aplicación El Profesor organiza sus actividades y exposiciones La principal preocupación es la exposición clara y ordenada de los contenidos (El Profesor como fuente y transmisor de conocimientos)	Organizar los contenidos y las actividades para facilitar a los alumnos la construcción del conocimiento La preocupación se centra en las actividades de los alumnos y en la supervisión y mediación en el aprendizaje (El Profesor como mediador y guía en el aprendizaje)
Simplificar, descomponer, recetar, atomizar, separar en lecciones claramente diferenciadas, no mezclar tareas y aplicaciones para no confundir al alumno	Llevar a los alumnos al corazón de los conocimientos favoreciendo la aparición de obstáculos y conflictos mediante problemas y cuestiones adecuadas
Detectar y formar prioritariamente a los buenos alumnos, discriminando entre los mejor y los peor dotados para las matemáticas	Favorecer el aprendizaje de todo el grupo, utilizando para ello los métodos más adecuados
Restringir las estrategias, procedimientos y respuestas a los que se han establecido, no admitiendo variaciones ni enfoques originales	Admitir la originalidad de pensamiento como elemento importante, animando la búsqueda de estrategias y soluciones alternativas

¿Que Matemáticas enseñar?

Las que indique la estructura de la propia matemática según el nivel y con independencia de las características de los alumnos	Las que se adapten en cada momento al desarrollo de las ideas matemáticas de los alumnos
El producto matemático acabado siguiendo una secuencia lógica en función de los conocimientos matemáticos necesarios en cada momento para el desarrollo de otros nuevos (el contenido como fín en sí mismo)	Las matemáticas necesarias para resolver problemas y plantear cuestiones e interrogantes (el contenido como medio)
Técnicas y destrezas matemáticas ante todo y como componentes aisladas de la comprensión y resolución de problemas	Primero el sentido de los conceptos y después las destrezas. Estas deben estar relacionadas y supeditadas a la comprensión y a la resolución de problemas

¿Como se deben enseñar?

Del mismo modo, se pueden plantear polos opuestos para este apartado. Detrás de todos los planteamientos, hay consideraciones epístemológicas claras acerca de la Matemática.

Epistemología y Enseñanza

El análisis epistemológico es un soporte necesario para la Educación Matemática. Los contenidos matemáticos en cualquier nivel educativo se pueden considerar bajo varias perspectivas que modifican sustancialmente las opciones didácticas a tomar, las actitudes y expectativas de los participantes, los métodos a emplear, los recursos a utilizar, los resultados, etc. (González y otros, 1990).

De entre los posibles enfoques que se pueden adoptar para un tópico concreto (números, suma, sistemas de ecuaciones, etc.), citaremos y analizaremos a continuaciòn, aquellos que parecen ser los màs comunes en la pràctica actual en el aula:

a) Parte de un programa sin más que el alumno debe cubrir para continuar sus estudios.

b) Una cuestión de cultura matemática.

c) Un medio más para estimular y favorecer el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades intelectuales.

d) Herramientas matemáticas necesarias y útiles para otros contenidos matemáticos posteriores.

e) Instrumentos útiles para otras Ciencias y para la vida.

f) Objetos conceptuales a construir dentro del proceso natural de adquisición, construcción y descubrimiento de conocimientos.

g) Medio de comunicación.

Y aquellos otros que incluirían varios de los puntos anteriores.

Dichas opciones, pretenden reflejar los posibles planteamientos básicos, no excluyentes entre sí, que se pueden tener en cuenta en la determinaciòn de los elementos que afectan al hecho educativo. Que duda cabe de que la posición usual es la de considerar simultáneamente varios de dichos enfoques, o bien alguno de ellos con carácter preponderante sobre los demás, bajo la suposición de que èstos se siguen como consecuencia de aquél.

Veamos cuàles debieran ser en general los conocimientos y reflexiones previas sobre los contenidos de un tema, para que su planificaciòn y desarrollo didàctico, sean coherentes con los enfoques adoptados.

Desde el punto de vista estricto de un contenido matemático concreto, podemos decir, que tener un conocimiento profundo y amplio a la vez del mismo, supone:

1) Dominar las construcciones matemáticas pertinentes, las estructuras y propiedades en juego, así como las herramientas matemáticas que se utilizan. Conocer, asimismo, los contenidos matemáticos relacionados con el tema y sus aplicaciones a otras ramas de la Matemática. Dominar, en definitiva, el producto final del hacer matemático en su consideración actual, tanto en su aspecto puntual y aislado como contextual y aplicativo.

2) Conocer los hechos históricos relevantes relacionados con el tema específico, dentro de un marco de referencias generales de la Historia de la Matemática; los marcos y periodos históricos en los que ocurrieron; los obstáculos que han impedido su comprensión y aceptación; las rupturas en las que tomaron parte, así como la situación actual a la luz de las matemática contemporáneas. Conocer en definitiva los avatares históricos del tema, asi como de las cuestiones relacionadas con él, directa o indiréctamente.

3) Conocer los estudios y reflexiones sobre la naturaleza y existencia de los objetos matemáticos en general y de los involucrados en el tema en particular, así como sobre los procesos y relaciones implicadas en la formación de los conceptos correspondientes, en su formalización y en su devenir histórico. En otras palabras, conocer la epistemología del contenido concreto como parte de la Epístemología de la Matemática, atendiendo a varios niveles de análisis (J. Piaget, 1979):

- nivel histórico-crítico: en el que se trata de interpretar la historia y buscar en ella respuestas a las cuestiones anteriormente planteadas.
- nivel psicogenético: en el que se trata de buscar en el propio individuo el modo de formación y evolución de los conocimientos, las características de estos y los factores que dan lugar al paso de unas situaciones cognoscitivas a otras más evolucionadas.

- nivel lógico-formal: en el que se pretenden desmenuzar las relaciones lógicas existentes bajo la construcción formal.

Ni que decir tiene que la combinación adecuada de las reflexiones realizadas en los niveles anteriores, puede ser también una fuente importante de datos epistemológicos. Así, J. Piaget (1.979) afirma : "Sólo existe un medio para llegar a las raices epistemológicas del conocimiento matemático: combinar el análisis lógico con el análisis genético, el análisis general de naturaleza lógica con el análisis elemental de naturaleza psicogenética".

4) Conocer las aplicaciones y utilidades del tema en cuestión en contextos no matemáticos tales como la vida diaria o la utilización en otras Ciencias, lejos de ser trivial, constituye un apartado importante a considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje correspondiente.

No cabe duda, de que disponer de la información a la que acabamos de referirnos en los apartados anteriores, es hoy día, por su extensión y profundidad, así como por el estado actual de las investigaciones, privilegio de unos pocos. Sin embargo, hemos de insistir en el hecho objetivo de que mientras que el diseño curricular y su desarrollo en el aula no estèn fundamentados en los conocimientos màs elementales sobre èstos cuatro apartados, difìcilmente se conseguirà que los alumnos comprendan los conceptos matemáticos y sepan manejarlos en contextos diferentes.

Pasemos a analizar las opciones planteadas, en relación con los conocimientos posibles sobre los contenidos del tema.

En primer lugar, abordar un tópico matemático como parte de un programa sin más, sin otras perspectivas que la de cubrir una etapa del trabajo docente (Opción a), no es digna de consideración, si tenemos en cuenta la contradicción que ello supone con los principios que normalmente motivan la realizaciòn de muchos trabajos de investigaciòn didàctica, así como, con los valores comùnmente atribuìdos a la Profesiòn docente y a la Educación en general. En consecuencia, no nos extenderemos màs en éste enfoque, que por desgracia se puede encontrar actualmente en algunas aulas, añadiendo ùnicamente que para el desarrollo del tema, es más que suficiente acudir a los múltiples manuales o libros de textos existentes y seguir fielmente sus indicaciones. Los resultados por cierto están ahí, y son por todos conocidos.

Considerar el enfoque de un tema como una cuestión de cultura matemática (Opción b), conlleva, como toda formación cultural, un carácter global y contextual, lo que obliga en cierto modo a incluir elementos de los cuatro apartados anteriores. El producto matemático aislado, acabado, aunque importante, es una información puntual y descontextualizada. No existen referencias con las que situar de forma adecuada los conceptos y que permitan al mismo tiempo relacionarlos con otros conocimientos, hechos o situaciones, salvo, claro está, las referencias puramente matemáticas, que vendrían a engrosar la idea tan extendida de la matemática perfecta y acabada como un edificio construído al margen de la realidad.

Por el contrario, para comprender los procesos y relaciones, así como para construir ideas completas sobre la naturaleza de los conceptos implicados, el enfoque cultural necesita no sólo del producto aislado y de sus contextos matemáticos, sino también, de las referencias tanto históricas y epistemológicas como de las relativas a las aplicaciones en contextos no matemáticos. Comprender y relacionar entre si los hechos históricos, así como conocer los significados e interpretaciones que el sujeto da a los conocimientos y la génesis de los mismos, supone un punto de partida fundamental para poder influir posteriormente en una correcta formación cultural.

El conocimiento matemático como medio para conseguir otros fines, bien para estimular y favorecer el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades intelectuales (Opción c), bien para proporcionar instrumentos útiles en la vida o en el campo de la propia matemática (Opciones e y d), o que permitan la comunicación concisa y sin ambigüedades de conceptos y proposiciones (Opción g), no deja de ser un contenido, cuyo tratamiento dependerá en cada caso de los fines que se persigan.

De este modo, si el profesor se propone desarrollar habilidades y capacidades intelectuales en sus alumnos, puede pensar que es posible hacerlo sin ninguna otra información que la que proporcionan la mayoría de los textos de matemáticas, en los que se desarrolla de forma aceptable el producto matemático así como sus consecuencias y aplicaciones también matemáticas. Basta para ello considerar el trabajo sobre el tema, como un juego intelectual basado en motivaciones extrínsecas, por las que se aprende la teoría y/o se aplica prácticamente, mediante la realización de todo tipo de ejercicios directamente relacionados con ella. Pero tal afirmación, sin ser totalmente falsa, ha de ser matizada para comprender que se trata de una verdad a medias.

Las cuestiones fundamentales que suscitan la duda en el planteamiento anterior surgen de un análisis de las habilidades y capacidades que supuestamente potenciarían tal enfoque de la enseñanza. Así, se puede pensar en estimular la memoria, aunque si ésta no es significativa pueden existir serias limitaciones. También se puede tratar de desarrollar la agilidad mental en lo que a estrategias de actuación y a la capacidad de análisis-síntesis se refiere, lo que requiere previamente que el alumno tenga una comprensión clara sobre los conceptos y procedimientos, sus aplicaciones y representaciones.

Del mismo modo, conseguir una mejora en la capacidad de razonamiento en situaciones problemáticas requiere de otros ingredientes, como son las capacidades de generalización y transferibilidad de conceptos y propiedades a otros contextos distintos de los ejercitados, codificar y decodificar mensajes, particularizar, elaborar hipótesis, conjeturar y demostrar, etc., lo que complica enormemente la afirmación tan simple expuesta en párrafos anteriores. Es decir, al analizar las características de las capacidades que se presume potenciar, nos encontramos con que el planteamiento es insuficiente para provocar un auténtico avance intelectual en el individuo. Por el contrario, Sastre, G. y Moreno, M. (1980), apuntan en el sentido de que ignorar estas cuestiones, puede conducir a:

- Desarrollar capacidades rígidamente ligadas a la asignatura de matemáticas y al contexto escolar, no integradas en el universo de posibilidades de actuación del individuo, y por tanto, no aplicables a situaciones distintas de las típicamente escolares o de aquellas que las originaron.
- Desarrollar desmesuradamente unas capacidades frente a otras, obligando al individuo a utilizar mecanismos tediosos o no deseados, ante la ausencia de instrumentos intelectuales apropiados para llegar a las respuestas correctas.(Ejemplo: memorización de tipos de problemas y de mecanismos de resolución correspondientes).
- Fomentar las consecuencias funestas del sentimiento de imposición de unos contenidos y unos ejercicios que pueden ser ingeniosos, pero cuyas conexiones con los mecanismos y experiencias anteriores, quedan si acaso a cargo del propio alumno.
- Violentar el desarrollo natural y espontáneo de los conocimientos del alumno, aumentando aún más el desfase existente entre el nivel aparente y el nivel real de conocimientos; entre lo que aparentemente sabe y es capaz de reproducir, y lo que realmente utiliza y aplica al desenvolverse en su medio.

Si se desea evitar lo anterior, y se quiere potenciar el desarrollo de habilidades y destrezas intelectuales realmente construidas, generalizables, e integradas en el repertorio de potencialidades mentales del individuo, es necesario hacer algo más que abordar el tema, sus aplicaciones y ejercicios, desde el punto de vista puramente matemático como un producto acabado que hay que aprender y machacar en el sentido tradicionálmente educativo del término. Hay que conectar la tarea a realizar: con los conocimientos y capacidades reales de los alumnos, con las ideas y significados previos y posiblemente rudimentarios y erróneos sobre los conceptos en juego y con los conocimientos y mecanismos reales que utilizan cotidianamente.

Sin la valiosa información que proporciona el conocimiento del trasfondo histórico, psicogenético y lógico-formal del tema, es difícil aspirar a algo más de lo que realmente se consigue en la práctica actual en las aulas: que algunos alumnos (los comúnmente llamados inteligentes o dotados especialmente para las matemáticas, o los que se embarcan con constancia, pundonor y en ocasiones con clases particulares, a la ardua, solitaria y particular tarea de comprender lo que tienen que "aprender"), descubran, a veces por casualidad y por su cuenta, parte de esas conexiones, construyendo algún conocimiento significativo en el proceso de búsqueda de respuestas correctas y

mecanismos fiables de reproducción, dentro de la dinámica de intercambios de actuaciones por calificaciones dentro del aula, y por consideración social fuera de ella.
Del mismo modo que los análisis epistemológicos se evidencian como aconsejables ante un enfoque como el tratado anteriormente, podemos decir que no lo son menos frente a la intención de dotar al alumno de herramientas o instrumentos útiles para distintos fines. Ya sea para un desenvolvimiento posterior en la Matemática (Opción d), en la vida o en otros contextos (Opción e), ya para poder comunicar (emitir y recibir) informaciones precisas (Opción g), parece evidente que los objetos y teorías matemáticas como instrumentos, deben ser conocidos en profundidad por el alumno, para que de su utilización se obtengan resultados óptimos. Y si ésto no es así, ¿cómo es posible obtener el máximo rendimiento de una herramienta, sin conocer bien su estructura y utilidad, y comprender su funcionamiento?.
Parece razonable pensar que con metas menos pretenciosas que las anteriores se pueden conseguir avances significativos en Educación Matemática. De hecho, toda nueva aportación, por pequeña que sea, ha de ser valorada como un paso importante en el proceso. No obstante, la pérdida de esas referencias ambiciosas es algo que no debe tener cabida en los contextos educativos, en los que cualquier dato, cualquier información adicional por simple que parezca, puede ser de inestimable ayuda.
Por último, la opción que pretende abordar la enseñanza pensando en los objetos matemáticos como objetos conceptuales a construir por el individuo (Opción f), conlleva ya en sí misma la justificación de los análisis epistemológicos, toda vez que resulta directamente de determinadas interpretaciones sobre la naturaleza y existencia del conocimiento matemático.
En consecuencia, al margen de toda cuestión teleológica coherente con los planteamientos teóricos modernamente aceptados en Educación Matemática, existe un hecho objetivo digno de toda consideración, cual es, la insuficiencia del producto matemático acabado y la necesidad de los análisis epistemológicos en torno al mismo, atendiendo al propio individuo, sus conocimientos y capacidades, a la sociedad y a la cultura, a otras Ciencias, buscando en la Historia, y desmenuzando por fin las definiciones y leyes formales que lo caracterizan, dotándolo de pleno significado y transformándolo en una información accesible, interpretable y completa, lo que no es poco para empezar a pensar en el tratamiento didáctico más adecuado, si no es que se deduce ya directamente de los mencionados análisis.

Epistemología y Cognición

Son muchas las relaciones que se pueden establecer entre la Epistemología y la Psicología y muchas las tendencias que se deducen de dicho análisis. Aquí, nos vamos a centrar en una de ellas por su relevancia en los planteamientos que soportan una buena parte del plan de formación que proponemos. Nos referimos al constructivismo en su sentido más amplio, cuyas líneas generales extraemos de la exposición que hace Rico (1992).
En los documentos recientes elaborados por el Ministerio, relativos al Diseño Curricular para el Area de Matemáticas, encontramos las siguientes consideraciones:
"Desde la perspectiva de su elaboración y adquisición, las matemáticas son pues más constructivas que deductivas. Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.
La naturaleza del conocimiento matemático, su carácter constructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y reflexionar sobre ellas obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos. Existe un estrecho vínculo entre las relaciones que los niños pueden establecer en un momento determinado y su nivel de desarrollo intelectual"
Fischbein (1987) señala el Constructivismo como una línea de reflexión prioritaria, y hace las siguientes consideraciones:

"Aprender matemáticas significa construir matemáticas. La actividad matemática es esencialmente un proceso constructivo. El estudiante no aprende matemáticas absorbiendo conceptos, definiciones, teoremas y demostraciones, sino construyéndolos mediante sus propios esfuerzos intelectuales. Pero los individuos no hacen todo esto respondiendo a sus propios problemas y movilizando sus propios significados intelectuales naturales. Nuestro comportamiento natural se adapta a la realidad concreta en la que vivimos y no a constructos formales gobernados por reglas y definiciones formales".

El Constructivismo puede caracterizarse simultáneamente como una posición cognitiva y como una perspectiva metodológica; ambas tienen la misma raíz epistemológica.

- Como perspectiva metodológica, el constructivismo asume que los seres humanos son sujetos que conocen, que sus comportamientos responden a propósitos y que los organismos humanos tienen una capacidad altamente desarrollada para organizar conocimiento.
- Como posición cognitiva, el constructivismo asume que todo el conocimiento es construido y que los instrumentos de construcción incluyen las estructuras cognitivas que son, a su vez, innatas (Chomsky) o bien el resultado de una construcción evolutiva (Piaget).

La segunda interpretación es más característica del constructivismo como posición cognitiva y es la que sostienen la mayoría de los constructivistas en Educación Matemática.

Esta idea es la que sostiene Fischbein (op. cit.) cuando afirma: "el constructivismo es una teoría del conocimiento. Nuestras congniciones no son duplicados de un mundo externo dado sino más bien construcciones cuyo propósito es el de garantizar los éxitos prácticos de nuestro comportamiento.".

Los orígenes del constructivismo actual se atribuyen, principalmente, al trabajo de Piaget. Noddings (1992) explica la aparición y desarrollo de las ideas constructivas a partir de Piaget en los siguientes términos: Al aceptar la distinción kantiana entre conocimiento empírico y lógico-matemático, Piaget aceptó la difícil tarea de explicar el desarrollo de las estructuras matemáticas cognitivas y lo hizo mediante el concepto de abstracción reflexiva. Esta, se diferencia de la abstracción clásica en que no procede de la observación de acontecimientos sino que se realiza en un proceso de interiorización de acciones sobre objetos. Piaget se separó de Kant al describir las estructuras cognitivas como resultado del desarrollo, en vez de como estructuras innatas.

No podemos forzar determinados resultados en los objetos sobre los que operamos. Nuestras operaciones están constreñidas de algún modo. Hay algo inevitable en los resultados y características de las operaciones. Esto sucede debido a que las estructuras resultantes son lógico-matemáticas y sus actuaciones están marcadas por la necesidad, lo que plantea un reto a aquéllos constructivistas que enfatizan la singularidad de las construcciones individuales. Las teorías de Piaget son, en el importante sentido que acabamos de describir, completamente constructivistas. No son únicamente procesos intelectuales constructivos sino que las propias estructuras cognitivas son, ellas mismas, productos de una construcción continua. Esta construcción activa implica a la vez una estructura básica desde la que comenzar la construcción (una estructura de asimilación) y un proceso de transformación o creación. Finalmente el constructivismo cognitivo de Piaget conduce, lógicamente, al constructivismo metodológico.

Por otra parte, el constructivismo en educación matemática sostiene que el constructivismo cognitivo implica el constructivismo pedagógico, es decir, la aceptación de premisas constructivas acerca del conocimiento y los sujetos que conocen implica un modo de enseñar que reconoce a los sujetos del aprendizaje como conocedores activos. Sin embargo, es cierto que se pueden aceptar los métodos pedagógicos sugeridos por el constructivismo sin aceptar las premisas constructivistas. También puede ocurrir que un constructivista filosóficamente convencido no necesite, lógicamente, emplear los llamados métodos constructivos.

Los constructivistas están, por lo general, de acuerdo en lo siguiente:

1. Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.

2. Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción. Estas es-tructuras explican el resultado de la actividad cognitiva en el sentido genérico en el que un programa de ordenador cuenta para los resultados.
3. Las estructuras cognitivas están en desarrollo contínuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes y el entorno presiona al organismo para que se adapte.
4. El reconocimiento del constructivismo como una posición cognitiva conduce a la adopción del constructivismo metodológico.

Carpenter (1990) señala algunas de las ventajas obtenidas en investigación al emplear el constructivismo metodológico:

“Hay una gran variedad de resultados prometedores en áreas específicas de investigación, pero la contribución más significativa de esta investigación consiste en que la enseñanza y el aprendizaje se describen como procesos activos en los que los profesores y aprendices construyen su propio conocimiento. Esto implica que, incluso aunque podamos no tener un mapa específico de cómo se adquieren los conceptos y destrezas particulares, podemos planificar la instrucción teniendo en cuenta lo que los estudiantes ya conocen y cómo asignan significado a los nuevos conceptos y destrezas que han aprendido, y podemos tener en cuenta el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones. Si aceptamos seriamente estos supuestos, tienen profundas implicaciones para el tipo de soluciones que buscamos para dirigir los problemas de la educación”.

Para los profesores, el constructivismo metodológico se convierte en constructivismo peda-gógico. Para enseñar bien necesitamos conocer lo que nuestros estudiantes piensan, cómo producen la cadena de marcas que vemos en sus hojas de trabajo, y qué es lo quieren o pueden hacer con el material que les presentamos. Pero las premisas cognitivas del constructivismo pueden dictar solamente guías para una buena enseñanza. No podemos obtener de ellas, como tampoco lo podemos hacer de ninguna otra posición cognitiva, métodos específicos de enseñanza.

El constructivismo pedagógico sugiere instrumentos de diagnóstico más sofisticados, he-rramientas que pondrán al descubierto patrones de pensamiento, errores sistemáticos y con-cepciones erróneas persistentes.

El método de hacer explícito el pensamiento es, o puede ser, un método potente de enseñanza tanto como una herramienta de diagnóstico, pero los profesores no deben limitarse sólo a ella debido a su carácter constructivo. Las premisas constructivas implican que puede haber muchas vías para llegar a muchas soluciones o terminales de instrucción.

Muchos educadores matemáticos reconocen el poder de los métodos constructivos en situaciones individualizadas, pero también aprecian que los escolares no pueden trabajar continuamente en tales situaciones. Las condiciones del aula nos fuerzan a pensar acerca de cierta economía en la instrucción. Los profesores constructivistas necesitan tener sus premisas básicas en la mente, pero debieran tener libertad para adaptar una amplia variedad de métodos a sus propios propósitos.

Por ejemplo, consideremos la recomendación constructiva general de que los profesores deben procurar un empleo considerable de material manipulativo. Esta recomendación fué un primer y plausible intento para aplicar la teoría de Piaget directamente a la enseñanza. Si la abstracción reflexiva proviene de las operaciones que realizamos sobre los objetos, entonces tiene sentido poner a los estudiantes a trabajar con objetos. La dificultad, por supuesto, está en que los estudiantes deben tener un propósito para implicarse en la manipulación de objetos, lo que probablemente necesita de alguna orientación e instrucción directa sobre el uso de los materiales antes de ponerlos a disposición de los alumnos. Asimismo, en las situaciones de resolución de problemas no debiéramos guiar a los estudiantes más de lo necesario, puesto que es posible que los apartemos de sus propósitos y los pongamos a trabajar en los nuestros.

La valoración del constructivismo es, por lo general, positiva y su influencia sobre la Educación Matemática es considerable, aún cuando se siguen planteando hoy día cuestiones importantes como la siguiente: debido a que los profesores tienen que trabajar con muchos niños, debemos preguntarnos si hay algún modo de trabajar en situaciones uno a uno con un grupo completo. ¿Se

puede lograr un pensamiento genuino de cada alumno en situaciones en las que interviene todo el grupo?.
Se han producido varios modelos que son altamente interactivos. Los profesores, simultáneamente, aplican el modelo y dirigen los logros, pero la aplicación del modelo se debe realizar planteando cuestiones, siguiendo los ejemplos y conjeturando, más que presentando productos incompletos. Enseñar por esta vía requiere un conocimiento matemático considerable así como destrezas pedagógicas. ¿Cómo pueden los profesores seguir las sugerencias de los alumnos si no saben las suficientes matemáticas como para percibir hacia dónde deben conducir las sugerencias?; ¿Cómo puede lograrse la implicación personal, que es esencial para realizar construcciones potentes?. Una posibilidad está en incrementar la cantidad de tiempo que los alumnos emplean trabajando juntos.
La gran fuerza del constructivismo está en que conduce a pensar crítica e imaginativamente acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La creencia en las premisas del constructivismo lleva a no confiar en soluciones simples y a disponer de un potente conjunto de criterios para el trabajo. Así lo indica Kilpatrick (1991) en su análisis sobre el constructivismo, que aunque centrado en su fundamentación epistemológica, deja entrever implicaciones importantes para el aprendizaje de las matemáticas. Resumimos a continuación algunos de dichos argumentos.

Lo que es y no es el constructivismo

Un problema epistemológico antiguo, no resuelto por la filosofía occidental, se refiere a cómo una realidad objetiva independiente puede llegar a ser conocida por el sujeto cognoscente, quien no tiene posibilidad de controlar si su conocimiento es o no conocimiento de algo. Cualquier intento para probar la veracidad de lo que es conocido debe ser, en sí mismo, un acto de conocimiento y por tanto, subjetivo. Cualquier conocimiento de una “verdad objetiva” resulta imposible. El constructivismo corta el nudo gordiano separando la epistemología de la ontología y argumentando que una teoría del conocimiento debiera ocuparse de la adaptación del conocimiento a la experiencia y no del emparejamiento entre conocimiento y realidad. La única realidad que podemos conocer es la realidad de nuestra experiencia.
El punto de vista constructivista implica dos principios:
1. El conocimiento es construido activamente por el sujeto que conoce, y no recibido pasi-vamente desde el entorno.
2. Llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo de experiencias de cada sujeto; no se descubre un mundo independiente y preexistente fuera de la mente del que conoce.
El primero de estos principios es más ampliamente aceptado que el segundo entre los que se consideran a sí mismos como constructivistas; el segundo principio resulta chocante para muchas personas. Este separa lo que se denomina constructivismo simple del constructivismo radical, que está basado en la aceptación de ambos principios.
El constructivismo radical se denomina así porque rechaza el realísmo metafísico en el que aún permanecen muchos empirístas. Requiere de los que lo aceptan olvidar todos los esfuerzos por conocer el mundo tal y como es. Nunca llegaremos a conocer una realidad exterior a nosotros. En vez de eso, todo lo que podemos aprender son las limitaciones del mundo sobre nosotros, las cosas no permitidas a través de nuestra experiencia con la realidad, lo que no funciona.
El constructivismo radical parece ser una epistemología que convierte todo el conocer en activo y todo el conocimiento en subjetivo. Siguiendo a las ciencias físicas en su rechazo de la posibilidad de llegar a conocer las realidades últimas, trata al sujeto cognoscente como organizador de su propia experiencia y constructor de su propia realidad. Considera el llegar a conocer como un proceso en el que, más que obtener información, el sujeto que conoce construye un modelo viable del mundo mediante ensayo y error.
En contraposición, al ser una teoría de la adquisición del conocimiento, el constructivismo no es una teoría de la enseñanza o instrucción. No hay una conexión necesaria entre cómo se considera la adquisición del conocimiento y qué procedimientos de instrucción parecen óptimos para lograr que esa adquisición suceda. La epistemología es descriptiva, mientras que las teorías de la enseñanza y

la instrucción deben ser, necesariamente, prescriptivas. Sin embargo, los constructivistas han tratado de obtener implicaciones para la práctica de su teoría; en algunos casos las implicaciones parecen indicar que algunas prácticas de enseñanza y consideraciones sobre la instrucción presuponen una visión constructivista del conocimiento. Sin embargo, Kilpatrick es rotundo con relación a esa pretensión y niega que las consecuencias que los constructivistas derivan del constructivismo radical para la práctica educativa puedan explicarse únicamente en términos de los supuestos del constructivismo. Por el contrario, argumenta que las consecuencias más importantes pueden entenderse en términos de otras hipótesis alternativas, es decir:

a) la enseñanza (usar procedimientos que pretenden y generan comprensión) puede distinguirse con precisión de la instrucción (usar procedimientos que pretenden un comportamiento repetido);

b) los procesos que se supone ocurren en el interior de la cabeza de los estudiantes son más interesantes que el comportamiento explícito;

c) la comunicación lingüística resulta un proceso para guiar el aprendizaje de los estudiantes, no un proceso para transferir conocimiento.

d) las desviaciones de los estudiantes de las expectativas del profesor resultan medios para entender sus esfuerzos por comprender;

e) la enseñanza por entrevista se propone como un intento no sólo de inferir las estructuras cognitivas sino también de modificarlas.

El resto del trabajo lo dedica a señalar conceptos y relaciones que los constructivistas deben clarificar para lograr mayor credibilidad y coherencia y, también, contribuir a una explicación científica de los fenómenos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En particular, señala líneas de reflexión en la conexión con las Matemáticas indicando la necesidad de profundizar y expresarse con más claridad sobre las relaciones entre el constructivismo, las matemáticas como disciplina y las matemáticas como materia escolar. Más aún, el constructivismo necesita orientar las demandas de una nueva aproximación a la filosofía de las matemáticas, el cuasi-empirismo, que estudia la práctica de las matemáticas en un contexto socio-histórico y que parece ser compatible tanto con la matemática realista como con la constructivista.

Igualmente realiza una crítica de la fundamentación constructivista del currículo en los siguientes términos:

“Algunos constructivistas han tratado de basar el currículo sobre una fundamentación constructivista. Se ha argumentado que necesitamos en primer lugar determinar el orden moral, político o social que creemos necesario, luego expresar nuestros propósitos educativos y, a la vista de estos propósitos, escoger el contenido y los objetivos del currículo. La espistemología puede resultar útil en este momento para determinar los objetivos cognitivos, pero serán necesarias otras ayudas para los objetivos no cognitivos.”

Con todo, no cabe duda que la contribución actual del Constructivismo a la Educación Mate-mática es, hoy día, importante y merecedora de consideración en aquéllos aspectos que nos interesan y que se centran en cómo lograr que los alumnos comprendan las matemáticas y sean capaces de continuar el aprendizaje de forma más autónoma.

Matemáticas y Educación Matemática

Las Matemáticas constituyen una materia multiforme, de ahí el uso del plural, sobre la que se han destacado diferentes rasgos en la enseñanza, dependiendo de las épocas y de los autores (Romberg, 1991). Para Schwarzenberger (1982) las matemáticas se pueden considerar como un conjunto de técnicas para ser aprobados mediante un examen, un cuerpo de conocimientos para ser aprendido, un lenguaje con una notación particular, el estudio de las estructuras lógicas subyacentes, un juego artificial jugado por un matemático, la construcción de modelos útiles en la ciencia o los procedimientos de calculo necesarios para aplicar el conocimiento. Es conveniente, por tanto, explicitar una opción, sobre qué son las matemáticas o al menos qué deben representar en nuestra actividad profesional, lo cual significa tomar una postura sobre qué matemáticas enseñar.

Según Romberg (1994), lo importante no son los distintos aspectos de la matemática en los que se puede o no incidir, sino en la distinción entre conocer los elementos principales de la disciplina matemática y hacer y construir las matemáticas. El conocimiento que versa sobre los elementos de la disciplina ya constituida, es importante; el estudiante precisa conocer conceptos y procedimientos para construir su propio conocimiento, pero no cabe duda que el más importante es el conocimiento como acción, en formación, mediante el cual el alumno descubre o crea conocimiento en la realización de determinadas actividades. Además, "en la medida en que el aprendizaje de las matemáticas se entienda como la apropiación de un saber constituido y acabado, es evidente que su capacidad para asimilar y aprehender la estructura interna de dicho saber condicionará la posibilidad misma de llevar a cabo el aprendizaje. Por el contrario, si el aprendizaje de las matemáticas se contempla como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno, entonces las características psico-evolutivas de los alumnos, sin dejar de jugar un papel esencial, difícilmente podrán ser consideradas como el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de contenidos del aprendizaje" (MEC, 1989). Tanto en este como en otros documentos curriculares oficiales, encontramos numerosas referencias al conocimiento matemático y a su enseñanza, de las que exponemos a continuación un extracto comentado de las más importantes (González, 1994).

<u>El conocimiento matemático en las orientaciones oficiales</u>

1).- Las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución contínua.

2).- La evolución, no se produce sólo por acumulación. A veces las matemáticas son reales y vivas.

3).- Las matemáticas escolares, se deben adaptar al nivel, lugar, edad, expectativas, etc.

4).- Y deben ser tanto deductivas como empírico-inductivas. Análogamente a como lo hace el matemático en su trabajo.

5).- Formalización, al final; definición, al final; axiomatización, al final. Problemas, tentativas, conjeturas y procedimientos intuitivos, primero. En la historia de los conceptos y teorías, casi siempre (¿o siempre?) ha ocurrido así.

6).- Las notaciones simbólicas sólo son un vehículo para las ideas. Si no hay ideas y conceptos en el aula, el vehículo no sirve para nada o para casi nada.

7).- El proceso de construcción en sus comienzos, tiene características distintas que en un estado avanzado de elaboración. La formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad, no son el punto de partida sino el de llegada de un largo proceso.

8).- Hay que distinguir entre la ciencia constituída y la ciencia en formación. Esta, es más educativa que aquélla aunque ambas son necesarias.

9).- Educar no es sólo enseñar (mostrar) la ciencia constituída, sino mostrar también el camino y sobre todo, favorecer la creación (re-creación) de "nuevos" conocimientos. Para ésto, no es necesario conocer previamente todo el conocimiento ya constituído.

10).- La re-creación y la creación de conocimientos, debe ser el propósito principal en Educación Matemática.

11).- Una explicación, sólo sirve para convencer al que duda y no para conducir a la comprensión. ¿Quién duda de esta conjetura psicopedagógica?. ¿Quién está dispuesto a elevarla a la categoría de axioma didáctico?.

12).- El conocimiento matemático, es construído por el individuo a partir de la acción sobre objetos. ¿Que acción?; ¿Que objetos?. Depende del nivel, evidentemente.

13).- El profesor de matemáticas, debe procurar que el alumno se implique personal y activamente en la resolución de situaciones-problema. En terminología francesa, debe conseguir la devolución de la responsabilidad al alumno.

14).- Es fundamental para la Educación Matemática, distinguir claramente entre ejercicio y problema.

15).- Las matemáticas son más constructivas que deductivas desde el punto de vista de su aprendizaje.

16).- En Educación Matemática hay que tener en cuenta también las dualidades: exactitud - estimación-aproximación; certeza - probabilidad; matemática nítida - matemática difusa.

17).- El aprendizaje matemático, desarrolla capacidades cognitivas. ¿Más que otros aprendizajes?. También puede proporcionar un grado elevado de autonomía para adaptarse al medio y organizarlo.

18).- Ser un buen matemático y ser un matemático erudito, son cosas distintas. Muy pocos son las dos cosas. Hay también malos matemáticos y no eruditos, a pesar de lo cual, pueden estar orgullosos de saber muchas más matemáticas que la mayoría de la gente. Es necesario desmitificar la figura del matemático. Es necesario desmitificar la matemática en el aula.

19).- Un matemático profesional, es aquél que trata de hacer matemáticas. Un profesor de matemáticas, es aquél que trata de hacer que sus alumnos hagan matemáticas. Todos tenemos algo que hacer pero los objetos son muy distintos.

20).- La Educación Matemática no puede vivir de espaldas a la realidad sociocultural, sencillamente porque tendría que vivir de espaldas a los alumnos, lo cual es un contrasentido desde todos los puntos de vista.

21).- Del mismo modo, la creación matemática no puede vivir de espaldas a la realidad sociocultural, sencillamente porque tendría que vivir de espaldas a los matemáticos que la hacen posible. Sin embargo, a veces ocurre que las realidades socioculturales de épocas y lugares diferentes, son muy parecidas, y sobre todo, las mentes de los matemáticos suelen ser muy parecidas.

22).- La utilidad individual de la matemática en la vida diaria, es más indirecta que directa. ¿Quién ha tenido necesidad alguna de vez de hacer una integral, hallar las raíces de un polinomio de 6º grado o calcular un límite?. ¡Ni siquiera para hacer la declaración de la renta!. No es una justificación sólida para su inclusión en el currículum. Sin embargo, ¿quién no necesita cada día: ordenar, estructurar, establecer prioridades, axiomatizar, algoritmizar acciones, decidir estrategias, estimar, razonar, codificar y decodificar mensajes, construir comportamientos complejos, manejar varias variables simultáneamente, esquemas topológicos, etc.?. Esto, sí es útil pero, ¿cómo se lo explicamos a los alumnos?. Quizás no haya que explicárselo; simplemente que lo comprueban por ellos mismos.

23).- Los axiomas, las definiciones y las demostraciones matemáticas, surgen por la necesidad de superar las dudas, de fundamentar, de convencer a otros, de comunicar ideas. Cuando puede haber problemas, es cuando se refina y se mira con lupa el producto del que se está convencido. Un matemático no convencido del todo, no axiomatiza ni define; se pone a revisar intuitiva y empíricamente todo el planteamiento

24).- En Educación Matemática, la Historia y la Epístemología deben ser medios, instrumentos y no fines en sí mismas. En principio, pueden actuar cambiando la mentalidad del profesor con respecto a la asignatura, su enseñanza y aprendizaje.

Las consideraciones anteriores son, en cierto modo, una forma de exponer las concepciones personales sobre el tema. Ellas constituyen, por tanto, la perspectiva sobre el conocimiento matemático con la que nos sentimos identificados y que podemos resumir de la siguiente forma: *el* *conocimiento matemático significa, fundamentalmente, aprender a hacer matemáticas en lugar de saber sobre ellas*. En este sentido, según Romberg, es importante aprender conceptos matemáticos así como destrezas, al igual que aprender a leer música, pero también es importante que los alumnos tengan la oportunidad de resolver problemas, de construir modelos matemáticos, de abstraer, inventar, probar, etc.

Un segundo aspecto importante a tener en cuenta es la consideración de las matemáticas como fenómeno cultural. Las matemáticas han sido creadas en respuesta a problemas sociales, de tal manera que existe una estrecha dependencia entre el contexto sociocultural y las matemáticas. Bishop (1988), en un análisis de estudios de carácter antropológico, pone de manifiesto que todas las culturas desarrollan algún tipo de matemáticas y que, aún siendo diferentes, hay seis actividades comunes a todas ellas: contar, situar, medir, diseñar, jugar y explicar. Es posible, en opinión de Bishop, desarrollar el currículo de matemáticas en función de esas seis actividades. Asímismo, diferentes grupos sociales y profesionales desarrollan unas matemáticas propias de su actividad (Oliveras, 1995), lo que con frecuencia se excluye de la enseñanza para centrar la atención en las matemáticas formales. Es evidente que el multiculturalismo es una realidad que se pone de manifiesto en cada sociedad, grupo e incluso en cada individuo, por lo que cuando se habla de atención a la diversidad en las aulas, es posible hablar también de atención individualizada como la forma extrema de respeto a la cultura de cada sujeto.

2.2.- Educación Matemática: conceptos y definiciones

Revisión de planteamientos iniciales

Opiniones extendidas

el estudio de las relaciones entre las matemáticas, el individuo y la sociedad
la reconstrucción de las matemáticas del momento en un nivel elemental
el desarrollo y evaluación de cursos para la enseñanza de las matemáticas
el estudio del conocimiento matemático, sus tipos, representación y crecimiento
el estudio del comportamiento de los alumnos cuando aprenden matemáticas
el estudio y desarrollo de las competencias del profesor de Matemáticas
el estudio de las comunicaciones e interacciones en el aula de Matemáticas
lo que se hace en las clases de matemáticas
todo lo que tiene que ver con la formación del pensamiento matemático de los seres humanos
. . .

Ejemplo: Steiner (1984): La Educación Matemática es un campo cuyos dominios de referencia y acción están caracterizados por una extrema complejidad: el complejo fenómeno de las matemáticas, en su desarrollo actual e histórico, y su interrelación con otras ciencias, áreas de práctica, tecnología y cultura; la estructura compleja de la enseñanza y la escolarización dentro de nuestra sociedad; las condiciones y factores altamente diferenciados en la cognición individual y el desarrollo social de los alumnos, etc. En esta conexión, la gran variedad de grupos de personas implicadas en el proceso total juega un papel importante y representa otro aspecto específico de la complejidad considerada.

Opinión mayoritaria entre expertos

Campo de fenómenos y procesos relacionados con las actividades humanas, sociales y culturales ordenadas y orientadas a la construcción, representación, transmisión, valoración y creación del conocimiento matemático y la cultura matemática considerada como experiencia colectiva organizada

Algunos elementos notables:

- Sistema de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

- Formación de profesores de matemáticas
- Didáctica de la Matemática
- Otros

Algunos enfoques

la Educación Matemática puede ser considerada como:

campo de decisiones y actuaciones político-administrativas centradas en la gestión del Sistema Educativo como servicio básico al individuo y a la sociedad.

campo de actividades humanas y sociales con propósitos didácticos y orientadas a prestar una atención básica a necesidades individuales, científicas y socio-culturales relacionadas con el conocimiento matemático

campo de actividades profesionales centradas en el docente o educador matemático como pieza clave del proceso educativo, gestor de dicho proceso y mediador en los aprendizajes

campo de problemas y estudio para el Área de Conocimientos de Didáctica de la Matemática, marco conceptual y científico desde el que se realizan indagaciones disciplinadas para conocer los fenómenos educativos en matemáticas.

Los mismos aspectos pero un poco organizados: La Educación Matemática es:

- un campo de problemas y estudio;
- sobre actividades humanas y sociales;
- planificadas parcialmente;
- desarrolladas mediante actividades profesionales;
- organizadas y controladas, todas ellas, por decisiones y actuaciones político-administrativas;
- basadas, con frecuencia, en argumentos ajenos a toda racionalidad científica;
- por motivos coyunturales que nada tienen que ver con la esencia de la actividad educativa.

Un esquema

Planteamiento "oficial"

Sociedad

(inercia, necesidades, . .)

Políticos; Leyes; Administración

(Campo de decisiones)

Instituciones

Sistema Educativo;	Universidad; Didáctica de la Matemática; .
(Campo de actuaciones básicas)	(Campo de problemas y estudio
Formación general	Formación de Profesores

Actividades humanas, sociales y profesionales

(campo de actividades)

Nuestra posición: primera aproximación

El planteamiento oficial es adecuado para describir pero insuficiente. Es necesario añadir matices teóricos y científicos que conforman una definición menos descriptiva que la oficial y que trata de entrar en consideraciones epistemológicas de la disciplina.

La nueva definición debería responder, al menos parcialmente, a cuestiones como las siguientes:
- ¿cuál es la esencia de la EM?
- ¿cuál es el sentido de la EM?
- ¿cuál es la naturaleza de la EM?
- ¿qué justifica la existencia del campo de la EM?

¿porqué es importante la EM?
¿cuáles son los fenómenos propios de la EM?
. . . .

<u>Educación Matemática: Nueva aproximación</u>

En este apartado se continuan las reflexiones iniciadas sobre la enseñanza de las matemáticas para tratar las características generales del campo de la Educación Matemática así como las diferencias y relaciones entre las Matemáticas y la Educación Matemática como campos de características, actividades y problemas diferentes. Es de destacar aquí que el tratamiento de este primer aspecto del apartado debe culminar en la consideración que hacen Rico, Sierra y Castro (1999):

> *"Denominamos Educación Matemática al conjunto de procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional. El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje son parte relevante de la educación en las sociedades contemporáneas avanzadas". (pág. 2).*

La reflexión y el análisis de los aspectos anteriores se debe completar con una atención especial a los fines de la Educación Matemática, dirigida a reflexionar y dar respuestas a interrogantes como los siguientes: ¿para qué enseñar-aprender matemáticas?; ¿de qué les sirve al individuo y a la sociedad el estudio de las matemáticas?. Se trata, en nuestra opinión, de una cuestión crucial en la formación inicial del profesorado, por lo que proponemos que se inicie aquí y se suscite con frecuencia a lo largo de todo el programa. Utilizaremos los documentos del apartado anterior, prestando atención especial al trabajo de Romberg (obra citada), a los documentos curriculares oficiales así como a los informes citados. Asímismo, nos detendremos en la lectura, reflexión y elaboración de conclusiones del artículo: Rico, L. (1997).- Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática. Suma nº 24, págs. 5-19, y utilizaremos la intervención de Niss en el CIDE de 1995 bajo el título "¿por qué enseñamos matemáticas en la escuela?".

Dos aspectos complementarios importantes para completar la visión general sobre el campo de la Educación Matemática, son los que se refieren a los factores y componentes de la Educación Matemática y a las tendencias actuales en Educación Matemática. Con respecto al primero de ellos, es necesario realizar un análisis elemental, en gran grupo, de las actividades diversas que se producen en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como de las personas e instituciones que intervienen. Además de identificar los diferentes elementos, se tratará de establecer las relaciones entre ellos y realizar una o varias clasificaciones empleando criterios diversos. Adicionalmente, se realizará una reflexión sobre los campos de conocimientos y las disciplinas relacionadas con la Educación Matemática, que se completará con el esquema debido a Steiner que se incluye en Gutiérrez (1991). Aquí aprovecharemos para indicar brevemente las diferencias entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática.

Las tendencias actuales en Educación Matemática se tratarán a nivel operativo concreto escolar (materialización en el aula), de iniciación y partiendo de un esquema de las orientaciones generales de los diseños curriculares para Primaria. Después de establecer las principales características generales del enfoque actual de las matemáticas escolares en España, pasaremos a analizar brevemente otros enfoques sin ánimo de exhaustividad, como por ejemplo: la enseñanza por diagnóstico de Alan Bell, el enfoque basado en la resolución de problemas y en el constructivismo, para lo que utilizaremos la lectura de la parte primera de Arcavi (1995), y una sucinta revisión de las características generales así como de los principales elementos (situación didáctica y a-didáctica, tipos de situaciones, devolución, contrato didáctico, transposición didáctica, etc.) de la enseñanza de las matemáticas bajo el enfoque sistémico de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau.

El bloque que estamos tratando se completará con un análisis del educador matemático, su papel, competencias, tipo de formación que necesita, conocimientos y destrezas profesionales que debe dominar, etc.; todo ello referido al nivel de Primaria.

Nuestra posición:

EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN CAMPO DE MÚLTIPLES RELACIONES VS. MÚLTIPLES CAMPOS RELACIONADOS

Bajo el epígrafe general de la Educación Matemática se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas podemos destacar, en primer lugar, la que atiende a los aspectos cognitivos, abarcando, entre otras, las características y evolución de los **aprendizajes**; errores y dificultades; procesos individuales; semejanzas y diferencias; representaciones; experiencias y formación de conceptos; adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.

Por otra parte, encontramos un campo centrado en la **enseñanza**, en el que se sitúan aspectos como los siguientes: naturaleza, relaciones, estructura y organización de los elementos del currículo escolar (objetivos, contenidos, metodología, otros organizadores (Rico, L., 1997, págs. 39-59), etc.), en presencia de factores y condiciones complejas (socioculturales, económicas, medio-ambientales, etc.); políticas educativas y proyectos curriculares; formación de profesores.

En tercer lugar, podemos distinguir una parte más ligada a la práctica basada en los **procesos de enseñanza-aprendizaje**, en los que interactúan diversos factores de los dos campos anteriores en distintos niveles (diseño, planificación e implementación) (Coriat, M., 1997, págs. 156-157), es decir: métodos y técnicas para provocar aprendizajes óptimos; recursos y medios necesarios; adecuación del currículo a las capacidades y necesidades de los alumnos así como a las necesidades científicas, socioculturales y a las diferencias individuales.

La separación entre estos tres campos, que se observa en el mayor peso dado en las investigaciones a la faceta psicológica o pedagógica de la Educación Matemática, no es acertada, puesto que se encuentran estrechamente relacionados entre sí bajo el denominador común de la Psicología de la Educación Matemática (Fischbein, 1990, pp. 6-12), en lo que constituye un *primer nivel* de relación que da origen a un núcleo de información centrado en las finalidades educativas y en las características generales del conocimiento matemático. A su vez, este primer nivel, de forma general y en particular cuando interviene un contenido matemático concreto, presenta una dependencia no menos importante de otros factores básicos, como son la Matemática, su Epistemología y su Historia o la Fenomenología del conocimiento matemático, en lo que constituye un *segundo nivel* de relación centrado tanto en finalidades como en contenidos. Esta segunda dependencia se fundamenta en los siguientes*principios generales*[1]:

a).- El conocimiento matemático es perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto y tiene que

[1] Elaborados a partir de las consideraciones de Tymoczko, T. (1986), Davis, P. J.; Hersh, R. (1988) y Puig, L. (1997).

ver con ideas u objetos conceptuales a los que el ser humano accede mediante el descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias. Estos objetos son independientes de su simbolización, tienen una existencia ficticia o convencional y comparten dos ámbitos diferentes: el conceptual individual y el supraindividual, cultural o colectivo como parte de la conciencia compartida.

b).- Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos, sus propiedades, las acciones sobre ellos y las propiedades de estas acciones, pertenecientes todos ellos a un mundo único en expansión que contiene los productos de la cognición humana y, en particular, los productos de la actividad matemática (Puig, L., 1997, pág. 67).

c).- La creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (fisiológicas, entre otras), del medio (físicas, sociales, culturales, entre otras) y de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

De dichos principios y de las relaciones entre ellos extraemos las siguientes consecuencias:

1.- La intervención de los tres factores (mente, medio e interacción) se produce en todas las interpretaciones sobre la naturaleza y el modo de producción del conocimiento matemático, de manera que el análisis epistemológico debe tener en cuenta las características de dichos factores.

2.- El análisis del conocimiento matemático desde una perspectiva educativa debe incluir los análisis epistemológico, cognitivo y fenomenológico, que se han de relacionar con un análisis sobre la enseñanza y el currículo como aspectos específicos y terminales de la Educación Matemática; cuatro grandes campos que deben formar parte del marco general de la investigación.

3.- Los análisis epistemológicos y fenomenológicos en la investigación educativa deben tener una orientación marcadamente didáctica. El interés se debe centrar en obtener información relevante para la enseñanza y el aprendizaje, lo que supone tener presente al alumno, sus necesidades y capacidades, el aula, las actividades, métodos y técnicas didácticas usuales, etc.. Con la información obtenida bajo este enfoque peculiar se encuentra la conexión entre las distintas partes de los dos niveles mencionados bajo una referencia única: *el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación*.

4.- De esta manera se sitúan en una posición privilegiada las relaciones entre la Epistemología de la Matemática y la Psicología de la Educación Matemática, que, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares. Asímismo, la vertiente pedagógica presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas o culturales que vienen a completar una visión global y específica en lo fundamental, sobre un campo en el que existen múltiples relaciones que demandan una integración previa a la realización de los estudios particulares de las distintas parcelas que lo componen y desde los diferentes enfoques que se vienen utilizando.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA, SOCIEDAD Y CULTURA

La Educación es un fenómeno social, parte integrante y esencial de la vida del hombre y de la sociedad en la que vive. Así se expresa en el Decreto de la Junta de Andalucía (BOJA 56, 1992):

> *"La educación consiste en un conjunto de actividades ordenadas a través de las cuales un grupo social ayuda a sus miembros a asimilar la experiencia colectiva culturalmente organizada y a preparar su intervención activa en el proceso social"*

La Educación Matemática juega un papel importante en el proceso de formación general y de integración de los sujetos a la sociedad. Entre otros aspectos, aporta elementos fundamentales para el desarrollo del individuo, como son las destrezas relacionadas con el razonamiento, la capacidad de pensar de forma ordenada y rigurosa, el desarrollo de estrategias de análisis y síntesis, el desarrollo de la autonomía intelectual, etc. Igualmente, son de destacar la utilidad en todos los ámbitos, el placer estético, etc.

En la Educación Matemática hay dos planos claramente diferenciados. En uno de ellos se crean las condiciones para que se produzca la personalización de la cultura matemática en el alumno; está regido por orientaciones oficiales, se lleva a cabo en centros oficiales y en él participan profesores y alumnos. En el otro plano se sitúa la reflexión sobre el plano anterior. Si esta reflexión se realiza con la pretensión de crear conocimiento científico estamos hablando de la disciplina Didáctica de la Matemática. Aquí, nos vamos a referir al primer plano mencionado, posponiendo la reflexión sobre el segundo a otros apartados del capítulo.

LAS MATEMÁTICAS Y EL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL

El Sistema Educativo español se ha caracterizado en los últimos años por sucesivas reformas y cambios. La LOGSE ha establecido un marco legal en el que se ha ampliado la educación básica hasta los 16 años y se ha realizado una reordenación en nuevas etapas, finalidades, organización, evaluación, etc. Las etapas son: Educación Infantil (0 a 6 años, 2 ciclos), Educación Primaria (6 a 12 años, tres ciclos), Educación Secundaria Obligatoria (12 a 16 años, dos ciclos) y Educación Secundaria Postobligatoria (bachillerato de dos cursos y formación profesional de grado medio).

El área de Matemáticas constituye una de las partes en las que se organizan las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria y a la Educación Secundaria Obligatoria. Asímismo, figura en tres de las cuatro modalidades en que se diversifican los estudios de bachillerato. En consecuencia, las matemáticas continúan desempeñando un papel fundamental en el período de la enseñanza obligatoria, como se pone de manifiesto en los diseños curriculares oficiales del Ministerio y de la Junta de Andalucía en relación con esta materia. Ya hemos hecho alusión a estos documentos en el apartado dedicado al conocimiento matemático al que nos remitimos, por lo que aquí sólo haremos referencia a las siguientes observaciones que hablan por sí solas de la relevancia que en la actualidad se concede a las matemáticas en el Sistema Educativo español.

> *"La contribución que hacen las Matemáticas son decisivas para alcanzar los objetivos generales de la Educación Obligatoria". "podemos decir que la importancia educativa que le atribuímos viene de entender que la Matemática, en sentido amplio, es sinónimo de capacidad para conocer por cuanto la consideramos como un instrumento del pensamiento que permite aprender y comprender lo real, bajo los aspectos cuantitativos y cualitativos, y su capacidad para comunicar esto a los demás" (Diseño curricular de Secundaria. Junta de Andalucía).*

EL EDUCADOR MATEMÁTICO

Uno de los elementos clave del Sistema Educativo es el profesorado. En nuestro caso, se viene utilizando el término "educador matemático" para hacer referencia a toda persona que pretende formar o instruir a otras mediante las matemáticas, es decir, considera las matemáticas, en todo o en parte, como objeto de educación para las personas a cuya formación y desarrollo está contribuyendo.

La formación del educador matemático es un aspecto fundamental y actualmente en discusión en el ámbito del Área de Conocimientos de Didáctica de la Matemática, en el que, como veremos, se vienen realizando investigaciones y propuestas que pretenden mejorar dicha formación. El perfil de esta formación es diferente en cada una de las etapas educativas mencionadas y viene condicionado por las características de la Educación Matemática en cada caso. Así, en Educación Primaria predomina el carácter formativo y de desarrollo de capacidades humanas en el aprendizaje de las matemáticas, aunque también se tiene en cuenta el carácter útil y práctico del conocimiento como factor de integración en el medio social y cultural. Un desarrollo más detallado sobre este aspecto se incluye en un apartado posterior a propósito de la formación inicial de maestros de Primaria.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE UN MAESTRO DE PRIMARIA

El perfil general de un Maestro de Primaria es el de un maestro que se suele denominar "generalista", si bien no se incluyen en su formación aspectos específicos relacionados con las áreas de Música, Educación Física y del Deporte, Lengua Extranjera y Religión o Ética. "*El papel del profesor en la educación primaria, es quizás uno de los elementos más determinantes de todo el proceso educativo ya que es en última instancia, quien va a guiar de forma directa el aprendizaje de un grupo de alumnos. Es el profesor el que deberá tomar una serie de decisiones de diversa índole que configurarán una forma particular de intervención didáctica*". (Junta de Andalucía, 1989).

Gimeno (1983) describe un listado de competencias generales que debe tener el profesorado:

1) Nivel de conocimientos suficiente para desarrollar los programas escolares.

2) Sensibilización ante la psicología del niño, sus peculiaridades, variables de su desarrollo y aprendizaje.

3) Capacitación en las diversas metodologías para conseguir que el alumno supere los objetivos y los contenidos de los programas, adaptándolos a las peculiaridades de los alumnos de forma que su aprendizaje sea activo, significativo y creador.

4) Comprensión y gobierno de las relaciones interpersonales en el aula y en el centro escolar, en un marco de relaciones no agresivas ordenadas por un sentido de la disciplina basado en el trabajo.

5) Programación a corto, medio y largo plazo de la tarea docente y del aprendizaje del alumno.

6) Conexión de los contenidos con la psicología del alumno y las peculiaridades del medio.

7) Selección, capacidad de uso y confección de los medios técnicos apropiados para la enseñanza.

8) Capacidad de diagnóstico y evaluación del alumno, de su aprendizaje y de las variables que condicionan ese aprendizaje, en el orden escolar, personal y ambiental.

9) Capacitación para integrar la escuela en el medio extraescolar.

10) Organización del aula y del centro en las áreas de su competencia para mejor canalizar los métodos que utiliza.

11) Desenvolverse en el marco de las tareas administrativas que le incumben.

12) Atención especial a los aprendizajes instrumentales y sus problemas.

Por otra parte, teniendo en cuenta las interacciones educativas necesarias para facilitar el aprendizaje, Zabala (1995) establece las siguientes funciones que debe asumir el profesor:

a) Planificar la actuación docente de una manera lo suficientemente flexible para permitir la adaptación a las necesidades de los alumnos en todo el proceso de enseñanza aprendizaje.

b) Contar con las aportaciones y los conocimientos de los alumnos, tanto al inicio de las actividades como durante su realización.

c) Ayudar a los alumnos a encontrar sentido a lo que están haciendo para que conozcan lo que tienen que hacer, sientan que lo pueden hacer y les resulte interesante hacerlo.

d) Establecer retos y desafíos a su alcance que puedan ser superados con el esfuerzo y la ayuda necesarios.

e) Ofrecer ayudas adecuadas a los progresos que experimentan y a los obstáculos con los que se encuentran en el proceso de construcción.

f) Promover la actividad mental autoestructurante que permita establecer el máximo de relaciones con el nuevo contenido, atribuyéndole significado en el mayor grado posible y fomentando los procesos de metacognición que le faciliten asegurar el control personal sobre sus conocimientos y los propios procesos durante el aprendizaje.

g) Establecer un ambiente y unas relaciones presididos por el respeto mutuo y por el sentimiento de confianza, que promuevan la autoestima.

h) Promover canales de comunicación que regulen los procesos de negociación, participación y construcción.

i) Potenciar progresivamente la autonomía de los alumnos en el establecimiento de objetivos, en la planificación de las acciones que les conducirán a ello y en su realización y control, posibilitando que aprendan a aprender.

j) Valorar a los alumnos según sus capacidades y esfuerzo, teniendo en cuenta el punto personal de partida y el proceso a través del cual adquieren conocimientos, e incentivando la autoevaluación de las competencias como medio para favorecer las estrategias de control y regulación de la propia actividad.

El Diseño Curricular de la Junta de Andalucía para Educación Primaria establece el papel del Maestro de Primaria en los siguientes términos:

1. Deberá planificar y organizar las distintas relaciones que se pretenden establecer en su grupo de alumnos: tipo de intervenciones en el grupo, tipo de relaciones entre alumnos, con los padres y con el resto de la comunidad. Debe ser por tanto un maestro estructurador de relaciones.

2. El maestro debe constituirse en modelo adulto significativo para su grupo de alumnos. El maestro debe cultivar actitudes: de respeto y confianza en el niño, fomentando el sentimiento de seguridad del niño; de afecto; de diálogo; de coherencia; de no autoritarismo; etc.

3. El maestro tiene el importante papel en cuanto a la formación en la clase de un grupo humano cohesionado mediante el empleo de recursos como: la asamblea, formación de grupos de trabajo, relación en el interior del aula y fuera del aula.

4. El maestro tiene un papel esencial como mediador de aprendizajes para los alumnos. Debe diseñar su intervención didáctica en función de los procesos de adquisición de conocimiento y características evolutivas de los alumnos.

5. El maestro como investigador curricular en el aula. Frente al simple papel de técnico ejecutor, el maestro puede asumir el papel de investigador de su acción desde un planteamiento la ejecución de algo que puede ser mejorado; sus programaciones adquieren el papel de hipótesis de trabajo a comprobar.

Estamos de acuerdo con Segovia (1997) en que este perfil de Maestro de Primaria tiene unas características generales que, consideradas como metas, no son exclusivas de ningún área de conocimientos. Desde cualquier área y, en particular, desde el área de matemáticas, se puede potenciar la consecución de estos objetivos de manera indirecta, asumiendo como Profesores de Educación Matemática los mismos roles que queremos que nuestros alumnos desempeñen como futuros maestros. Por ejemplo, promoveremos un maestro investigador si a su vez nosotros transmitimos esa manera de ejercer la profesión en nuestras clases.

EL MAESTRO DE PRIMARIA COMO EDUCADOR MATEMÁTICO

La idea de educador matemático trata de resaltar la importancia del aspecto educador por encima del aspecto instructivo en matemáticas; educar en matemáticas implica tener en cuenta las características y peculiaridades de la persona que es educada y situar la educación matemática dentro de un sentido general de la educación.

> *"Si hasta este momento han predominado los componentes instructivos del conocimiento matemático, cada vez se aprecia con más fuerza la insuficiencia de ese planteamiento y se va tomando conciencia de que la formación matemática es una dimensión relevante de la educación de los niños y adolescentes. De ahí que se hable de Educación Matemática, con una visión más integradora de las capacidades humanas que se desarrolla mediante los procesos de aprendizaje de las matemáticas" (Rico, 1991).*

Por otra parte, a pesar del tiempo transcurrido desde que escribiera en 1955 su decálogo de sugerencias dirigidas a los profesores de matemáticas, creemos que las ideas del profesor Puig Adam siguen siendo de actualidad. Las sugerencias que hizo entonces son las siguientes:

1) No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno, observándole constantemente.

2) No olvidar el origen concreto de la matemática, ni los procesos históricos de su evolución.

3) Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

4) Graduar cuidadosamente los planos de abstracción.

5) Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

6) Estimular la actividad creadora, despertando el interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

7) Promover en todo lo posible la autocorrección.

8) Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

9) Cuidar que la expresión del alumnos sea traducción fiel de su pensamiento.

10) Procurar que todo alumno tenga éxitos que eviten su desaliento.

Un documento más actualizado en este sentido es el editado por *The Professional Standards for Teaching Mathematics* del NCTM (1991), en el cual se consideran las siguientes funciones a cumplir por un buen profesor de matemáticas:

a) Crear un ambiente en la clase que favorezca la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

b) Fijar objetivos así como diseñar y seleccionar tareas matemáticas que ayuden a los estudiantes a conseguir dichos objetivos.

c) Estimular y dirigir el discurso de la clase para que, tanto profesor como estudiantes, vean con claridad lo que se está aprendiendo.

d) Analizar el aprendizaje, las tareas matemáticas y el ambiente, en orden a dirigir la instrucción y la toma de decisiones.

Por su parte, Niss (1994) presenta las características de un buen profesor de matemáticas en base a cuatro axiomas:

1º) Los profesores deben acometer el equipamiento de sus estudiantes con conocimientos de las matemáticas, intuición y experiencia, que puedan servirles en su vida privada, profesional y social. En otras palabras, los profesores deben servir como genuinos mentores y no sólo como simples empleados.

2º) Los profesores, asímismo, deben ser capaces de realizar todo el trabajo que se espera hagan sus estudiantes. En otras palabras, los profesores deben de poseer la lista de competencias que deberá requerir a sus estudiantes (esto no implica que deban de ser tan buenos realizadores como el mejor de sus estudiantes).

3º) Usualmente los profesores van a estar en activo durante varias décadas por lo que, al ser preparados para su trabajo, se deberá tener en cuenta esta circunstancia y se les ayudará a ser constructor activo en el desarrollo de la educación matemática, incluso si esto implica cambios fundamentales en las componentes y factores que determinan la figura y funciones de los profesores de matemáticas. En otras palabras, en orden a ser agentes e instrumentos para el desarrollo y ante las posibilidades de cambios, los profesores han de poseer una gran flexibilidad, competencia que va más allá del requerimiento inmediato diario.

A partir de los enunciados anteriores se pueden describir las cualidades del profesor de matemáticas ideal (Segovia, op. cit.):

a) Debe poseer un profundo y rico conocimiento y una percepción de las matemáticas en multitud de dimensiones y manifestaciones. Así, debe de adquirir no sólo teorías matemáticas, sino también aspectos de la matemática como una ciencia que tiene historia y que se introduce en la sociedad como parte de la cultura humana en toda su diversidad. Muchos modelos matemáticos son usados en un gran número de diferentes contextos extramatemáticos en estrecha relación con otras materias de categoría similar. Las matemáticas no son sólo un edificio de un producto teórico, sino también un área de actividad y procesos que incluye plantear, explorar, investigar, crear y resolver problemas.

b) Comprender continuamente las razones fundamentales para enseñar matemáticas a las distintas categorías de estudiantes y cómo estas razones pueden ser discutidas con los propios estudiantes, con colegas y otras personas, parientes, vecinos, políticos, etc.

c) Estar en un continuo proceso de crecimiento y desarrollo basado en la apertura de la mente; orientar el conocimiento al interés reflejado por la gente, por los educadores matemáticos, los investigadores, la sociedad, la cultura, es decir, ser un profesor profesionalmente activo.

d) Ser capaz de seleccionar y producir una riqueza de materiales para la enseñanza y recursos ajustados a las circunstancias específicas y a las necesidades de sus clases y de sus estudiantes.

e) Ser capaz de organizar grupos de trabajo y supervisar diferentes formas de estudios y de actividades apropiadas para trabajar en y con las matemáticas.

f) Ser capaz de comunicar con sus estudiantes y con otras personas, en y sobre matemáticas, en una amplia variedad de caminos y niveles.

g) Ser capaz de tomar ante sus estudiantes la posición y el papel del matemático en la sociedad y en la cultura.

h) Poseer conocimiento teórico y empírico sobre los procesos en donde los estudiantes deben experimentar, percibir, y reflexionar; sobre los errores que estos pueden cometer; sobre las formas de los alumnos para obtener conocimiento matemático.

i) Ser una persona capaz de observar e investigar con actitud científica el proceso y el producto del aprendizaje de sus estudiantes, es decir, ser capaz de llevar a cabo a pequeña escala investigaciones didácticas.

j) Ser una persona capaz de valorar, en múltiples facetas, la comprensión y los logros de sus estudiantes sobre el conocimiento matemático así como de comunicar y discutir los descubrimientos con los estudiantes individualmente o en grupo.

Por último, citaremos las recomendaciones de Romberg (1991) en torno a la necesidad de profesores:

a) que creen situaciones epistemológicas en las que los niños pueden explorar problemas, crear estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos;

b) con los conocimientos académicos y pedagógicos para proporcionar enfoques flexibles, estimular representaciones informales y múltiples y al mismo tiempo promover el aumento gradual del lenguaje matemático;

c) que puedan diagnosticar las dificultades y planificar cuestiones que faciliten el progreso mediante el conflicto cognitivo;

d) que puedan mantener una atmósfera cooperativa que conduzca a una mayor independencia de los alumnos, una reflexión atenta sobre las estrategias de motivación cognitiva y un reconocimiento de los tópicos epistemológicos, cognitivos y sociales de la enseñanza y del aprendizaje.

2.3.- FINES DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Muchas de las consideraciones realizadas en los apartados anteriores hacen referencia indirectamente a las características del conocimiento o de la formación que dicho conocimiento puede proporcionar, de donde surge inmediatamente el problema de la justificación de la enseñanza y de la elección de las metas o propósitos que se desea alcanzar. Se trata, en nuestra opinión, de uno de los aspectos centrales de la Educación Matemática, estrechamente relacionado con la naturaleza del conocimiento matemático, con las necesidades socioculturales e individuales y con las características globales del proyecto sociocultural que ha de albergar la formación de las nuevas generaciones; en defintiva, se trata del conjunto de argumentos que justifican la enseñanza misma de las matemáticas y su situación, organización y tratamiento dentro del Sistema Educativo.

La Ley de Ordenación General del Sistema Educativo en España establece las siguientes finalidades educativas generales:

- El pleno desarrollo de la personalidad del alumno;

- La formación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales y en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad dentro de los principios democráticos de convivencia;

- La adquisición de hábitos intelectuales y técnicas de trabajo, así como de conocimientos científicos, técnicos, humanísticos, históricos y estéticos;

- La capacitación para el ejercicio de actividades profesionales;

- La formación en el respeto de la pluralidad lingüística y cultural de España;

- La preparación para participar activamente en la vida social y cultural;

- La formación para la paz, la cooperación y la solidaridad entre los pueblos.

Las Matemáticas deben y pueden contribuir, junto a otras disciplinas, a la consecución de todas y cada una de las metas generales anteriores. La cuestión que nos proponemos debatir en este apartado se refiere a la determinación de las finalidades específicas de la Educación Matemática, no sólo para favorecer la consecución de las metas generales propuestas sino para determinar la importancia y el alcance de la formación matemática dentro de dicho panorama general.

El problema de la determinación de las finalidades o metas de la Educación Matemática, es una cuestión de especial relevancia para el diseño y el desarrollo de cualquier currículo de matemáticas. De las reflexiones incluidas en Rico, L. (1997) extraemos el resúmen que comentamos a continuación. Posteriormente, expondremos nuestro punto de vista como uno de los pilares fundamentales del proyecto que presentamos.

En los trabajos sobre el currículo de matemáticas, se han planteado numerosos interrogantes en torno a la finalidad de la Educación Matemática: ¿Para qué enseñar matemáticas?, ¿qué matemáticas enseñar en una sociedad tecnológica?, ¿cómo lograr un currículo flexible que atienda a las diversas necesidades de los escolares?, ¿cómo atender a la diversidad cultural?, etc (obra. citada, pág. 5). En estos y otros interrogantes queda patente la importancia del debate sobre los fines de la

Educación Matemática para la determinación de los distintos elementos de un currículo de Matemáticas (n. del a.).

Sin embargo, se aprecian diferencias importantes entre los fines propuestos por diversos autores, lo que justifica el exámen a fondo de las diversas respuestas a la que parece ser la cuestión central del debate: ¿Por qué se enseñan matemáticas?. Rico analiza en su trabajo una selección de documentos y autores que reflexionan sobre esta cuestión (págs. 6 y 7). Entre ellos cita las siguientes metas generales propuestas en el documento “Mathematics from 5 to 16” del Department of Education and Science Británico (1985) para la Educación Matemática en el periodo obligatorio:

1.- Las matemáticas son un elemento esencial de comunicación
2.- Las matemáticas son una herramienta potente
3.- Hay que apreciar las relaciones internas dentro de las matemáticas
4.- Las matemáticas deben resultar una actividad fascinante
5.- Hay que fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente
6.- Trabajar de modo sistemático
7.- Trabajar independientemente
8.- Trabajar cooperativamente
9.- Profundizar en el estudio de las matemáticas
10.- Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades matemáticas

Las opiniones de la comunidad matemática respecto a para qué se enseñan matemáticas en la escuela se reflejan en diferentes trabajos realizados por distintos grupos sobre cuáles deben ser las metas en la enseñanza de las matemáticas. Romberg (Op.cit.) y también Rico (1987), recopilan estos estudios de los cuales presentamos algunos:

Informe Cokcroft (1982):

Meta 1: Permitir que cada alumnos desarrolle, de acuerdo con sus propias aptitudes, las destrezas y los conocimientos matemáticos necesarios para su vida adulta, para el empleo y para continuar el estudio y la formación, siendo consciente al mismo tiempo de las dificultades que algunos alumnos experimentarán.

Meta 2: Proporcionar a cada alumno el tipo de matemáticas que pueda necesitar para el estudio de otras materias.

Meta 3: Ayudar a cada alumno a desarrollar en lo posible su apreciación y disfrute de las matemáticas por sí mismas y su comprensión del papel que éstas han desempeñado y seguirán desempeñando tanto en el desarrollo de la ciencia y la tecnología como de nuestra civilización.

Meta 4: Por encima de todo, hacer conscientes a todos los alumnos de que las matemáticas les proporciona un poderoso medio de comunicación.

N.C.T.M. (1989):

Meta 1: Aprender a valorar las matemáticas. Comprender su evolución y el papel que desempeñan en la sociedad y en las ciencias.

Meta 2. Adquirir confianza en la aptitud propia. Llegar a confiar en el pensamiento matemático propio y poseer la capacidad de dar sentido a situaciones y resolver problemas.

Meta 3. Adquirir la capacidad de resolver problemas matemáticos. Esto es esencial para llegar a ser un ciudadano productivo y exige experiencia para resolver diversos problemas generalizados y no rutinarios.

Meta 4. Aprender a comunicarse matemáticamente. Aprender los signos, los símbolos y los términos matemáticos.

Meta 5. Aprender a razonar matemáticamente. Realizar conjeturas, reunir pruebas y construir argumentos matemáticos.

Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía (1992):

"*La finalidad que se le atribuye a la formación matemática es la de favorecer, fomentar y desarrollar en los alumnos la capacidad para explorar, formular hipótesis y razonar lógicamente, así como la facultad de usar de forma efectiva diversas estrategias y procedimientos matemáticos para plantearse y resolver problemas relacionados con la vida cultural, social y laboral*".

En la revisión realizada, encuentra que no todos los documentos hacen el mismo tipo de consideraciones y que existen notables diferencias entre ellos. Del mismo modo, el autor realiza una revisión de los debates y reuniones de expertos en los que se plantea el problema (págs. 7 y sigtes.). En particular se analiza el resumen y reflexiones de D'Ambrosio (1979) sobre el trabajo realizado en el ICME III y la reflexión de Romberg, T. (1991) sobre las funciones de la Educación Matemática. Este último considera dos tipos de justificaciones: funcionales y otras; las comentamos brevemente a continuación.

Las *justificaciones funcionales* se basan en la idea de que las matemáticas satisfacen una necesidad funcional de largo alcance, es decir, son necesarias para la formación de los sujetos en orden a cumplir diversas finalidades tanto individuales como sociales o científicas. Las cuestiones que surgen a partir del planteamiento anterior tienen que ver con las matemáticas que serán útiles en el futuro, con las que deben ser comunes a todos los individuos y las que deben corresponder a currículos diferenciados, o con las matemáticas que se debieran implantar en el contexto de los diversos planes de reforma educativa.

Las *justificaciones "no funcionales"* atienden, según Romberg, a razones que tienen que ver con la belleza de las matemáticas, con el desarrollo de capacidades, actitudes y destrezas de alto nivel, con la necesidad de formación de matemáticos profesionales o con la importancia de las matemáticas como parte de nuestra cultura.

Según Rico (pág. 10), Niss, en un trabajo más reciente y en la misma linea que Romberg, reconoce también dos tipos de argumentos en los estudios sobre fines de la Educación Matemática: argumentos utilitarios y argumentos de formación general. Entre los primeros se encuentran: la formación para desenvolverse en la vida y las necesidades tanto laborales como para el estudio de otras ciencias. Entre los segundos se pueden situar: el desarrollo de las capacidades formativas, de la personalidad y de las actitudes asì como las que atienden al carácter estético y recreativo de las matemáticas.

De la revisión realizada, el autor constata que "no parece haber aún consenso en las respuestas que hay que dar a la pregunta: ¿Porqué enseñamos matemáticas?" (pág. 11). Por otra parte asegura que "no está clara la correspondencia entre los fundamentos contemplados y las implicaciones curriculares que se pretenden derivar de los mismos" (pág. 10), ya que se aprecian disparidades e incoherencias entre las finalidades pretendidas y la puesta en práctica del currículo de matemáticas; entre los fundamentos y las prácticas reales.

En el mismo documento, una vez concluida la revisión, Rico expone una elaboración teórica para organizar la variedad de dimensiones que caracterizan los fines de la Educación Matemática (obra citada, págs. 11 y siges.). Identifica cuatro categorías amplias de finalidades: culturales, sociales, formativas o educativas y politicas. Pasemos a exponer a continuación una síntesis de las consideraciones del autor en torno a las cuatro categorías mencionadas.

En cuanto a la cultura y los fines de la Educación Matemática, Rico considera que la enseñanza de las matemáticas forma parte del sistema educativo obligatorio de cualquier pais; estos sistemas transmiten la herencia cultural básica de cada sociedad, por lo que las disciplinas no pueden ser ajenas o contrapuestas a los valores fundamentales de las culturas. En consecuencia considera que el conocimiento matemático no puede considerarse aislado del medio cultural. Las matemáticas contribuyen a ajustar la conducta humana a pautas de racionalidad y a desarrollar un pensamiento objetivo. “El carácter histórico y contingente del conocimiento matemático, su consideración como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales ligadas a un contexto social e histórico concretos y no como productos intangibles o verdades imperecederas, reafirman esta dimensión cultural que debe contemplarse cuidadosamente entre las finalidades de la educación matemática” (pág. 12).

La dimensión social queda justificada, según el autor, en la idea de que el conocimiento matemático se conforma socialmente, es público y tiene lugar mediante relaciones de comunicación entre las personas. Su tratamiento en el ámbito educativo atiende, según algunos autores, a dos tipos de finalidades sociales: a) proporcionar al ciudadano común las herramientas matemáticas básicas para su desempeño social; b) proporcionar cualificación profesional adecuada para atender a las necesidades del mercado de trabajo y a los retos organizativos y de gestión que tiene planteados la sociedad actual. Según Rico (obra citada, pág. 14), son tres los ámbitos de reflexión o modos de considerar las matemáticas como herramienta intelectual determinada socialmente y que, por tanto, tienen que ver con la dimensión social de la Educación Matemática:

- la práctica profesional de los matemáticos y especialistas cualificados en matemáticas;
- los contextos matemáticos o “las necesidades matemáticas del mundo del trabajo” (Informe Cockcroft (1982));
- los hábitos y prácticas usuales en el empleo de las matemáticas, que abarca las necesidades básicas de cada ciudadano para desenvolverse en la sociedad (“necesidades matemáticas en la vida adulta” del Informe Cockcroft).

Por último, la dimensión formativa se justifica en base a la “satisfacción de las necesidades individuales . ., el desarrollo integral de los niños y jóvenes en edad escolar” (obra citada, pág. 15). Para ello, “las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio porporciona privilegios y ventajas intelectuales” (pág. 15); la educación matemática debe contemplar, por este motivo, además de la información y la instrucción en habilidades y técnicas, el desarrollo de capacidades, estructuras conceptuales y procedimientos y estrategias cognitivas, tanto particulares como generales, que conformen un pensamiento abierto, creativo, crítico, autónomo y divergente. En este sentido, las matemáticas poseen unos valores formativos innegables, algunos de los cuales transcribimos a continuación (obra citada, pág. 15):

- *La capacidad para desarrollar el pensamiento del alumno, que permiten determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias, y, en definitiva, potenciar el razonamiento y la capacidad de acción simbólica;*
- *La utilidad para promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para pbtener eficacia o belleza; las matemáticas han de promover el uso de esquemas, representaciones gráficas, y fomentar el diseño de formas artísticas y la apreciación y creación de belleza;*
- *La adecuación para lograr que cada alumno paricipe en la construcción de su conocimiento; las matemáticas escolares han de ser asequibles, no pueden constituir un factor de discriminación;*
- *La versatilidad para estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la discusión y defensa de las propias ideas, y para asumir la toma conjunta de decisiones;*
- *La potencialidad para desarrollar el trabajo científico y para la búsqueda, identificación y resolución de problemas;*
- *La riqueza de situaciones para movilizar este tipo de conocimientos, de manera que se estimule la gratificación por los esfuerzos intelectuales y la satisfacción con el trabajo bien hecho.*

La cuarta categoría a tener en cuenta en relación con las finalidades de la Educación Matemática, según Rico, es la que se refiere a la dimensión política. Los elementos clave a tener en cuenta en este caso son, entre otros, la difusión de los valores democráticos y de integración social así como la realización y el ejercicio de la crítica y el esfuerzo por la acción comunicativa. En particular, tiene especial relevancia en este punto el debate sobre las aplicaciones de las matemáticas consideradas como conocimiento tecnológico, las consecuencias éticas y sociales de las mismas y la formación necesaria para articular una crítica a cualquier aplicación tecnológica de las matemáticas que afecte a la sociedad y a la vida de las personas. El autor considera que “una escuela orientada hacia la consecución de valores democráticos junto con los formativos individuales debe enfatizar el conocimiento reflexivo de todo el sistema de las matemáticas . . la asunción explícita de valores éticos y democráticos entre las finalidades de la Educación Matemática se articulan en un eje o dimensión política, en su sentido más noble.” (pág. 17).

No es suficiente con enunciar las finalidades para que se desarrollen de manera armoniosa y coordinada. La experiencia señala que algunas de las metas enunciadas resultan contradictorias en la práctica.

NUESTRA POSICIÓN

Estamos de acuerdo, en general, con lo que se ha expuesto en los párrafos anteriores. Sin embargo, queremos aprovechar la ocasión para manifestar algunos aspectos de nuestra posición al respecto, en el bien entendido que lo hacemos con el ánimo de añadir algunos matices a las consideraciones anteriores por si pudieran ser de utilidad o arrojar un poco más de luz sobre el campo de los fines de la Educación Matemática.

Como ya hemos manifestado a propósito de las reflexiones curriculares, la Educación Matemática no puede vivir de espaldas a la realidad sociocultural, sencillamente porque tendría que vivir de espaldas a los alumnos, lo cual es un contrasentido desde todos los puntos de vista. Del mismo modo, la creación matemática no puede vivir de espaldas a la realidad sociocultural, sencillamente porque tendría que vivir de espaldas a los matemáticos que la hacen posible. Sin embargo, a veces ocurre que las realidades socioculturales de épocas y lugares diferentes, son muy parecidas, y sobre todo, las mentes de los matemáticos suelen ser muy parecidas.

Citamos también la siguiente reflexión que consideramos de utilidad para la cuestión que nos ocupa: La utilidad individual de la matemática en la vida diaria es más indirecta que directa. ¿Quién ha tenido necesidad alguna de vez de hacer una integral, hallar las raíces de un polinomio de 6º grado o calcular un límite?. ¡Ni siquiera para hacer la declaración de la renta!. No es una justificación sólida para su inclusión en el currículum. Sin embargo, ¿quién no necesita cada día: ordenar, estructurar, establecer prioridades, axiomatizar, algoritmizar acciones, decidir estrategias, estimar, razonar, codificar y decodificar mensajes, construir comportamientos complejos, manejar varias variables simultáneamente, utilizar esquemas topológicos, etc.?. Esto, sí es útil, pero, ¿cómo se lo explicamos a los alumnos o a los padres?. Quizás no haya que explicárselo; simplemente que lo comprueben por ellos mismos.

Participamos de las consideraciones generales establecidas, que resumimos desde nuestro punto de vista en tres grandes finalidades de la Educación Matemática:

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe alcanzar, mediante la adquisición de unos instrumentos, unas técnicas y procedimientos, unas estrategias y un vocabulario específico, una formación cultural e intelectual que permita al individuo:

1.- **Adaptarse** al medio, organizarlo y potencialmente transformarlo, lo que implica un conocimiento profundo del mismo y el desarrollo de capacidades relacionadas con el análisis de la realidad, la construcción de modelos y la creación de alternativas que mejoren la situación individual y colectiva.

2.- Adquirir un buen nivel de **autonomía** intelectual, lo que se traduce en que el individuo sea capaz de buscar y ampliar por sí mismo la información de que dispone sobre una situación, analizar todas las posibilidades y, de entre ellas, elegir las mejores;

3.- Conocer la Matemática como parte de la **cultura** universal y desenvolverse en su mundo, lo que conlleva un gusto por el trabajo matemático y una profundización en los objetos y métodos propios, siendo consciente de su situación actual y de la evolución sufrida a través de la historia.

La enseñanza de las matemáticas debe contribuir, al igual que otras disciplinas, al fin 1, es un factor importante para alcanzar el fin 2 y es fundamental para alcanzar el fin 3.